Prof. Dr. H.–J. Reinhardt
Prof. Dr. B. Dreseler
Stefan Schuß

Dept. Mathematik
Univ. Siegen

Übungsaufgaben (7)
zur Vorlesung „Einführung in die Funktionalanalysis“ im Wintersemester 2012/2013

(Abgabetermin: Mittwoch, 28.11.2012, 10 Uhr)

22. Sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall, $f \in L^1(a,b)$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) = \int_a^x f(y)\,dy.$$

Zeigen Sie, dass g stetig ist.
Anleitung: Sei $x_0 \in [a,b]$ ein beliebiger Punkt und $x_n \in [a,b]$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Zeigen Sie, dass $\chi_{[a,x_n]} f \to \chi_{[a,x_0]} f$ f.ü. auf $[a,b]$ und wenden Sie den Satz von Lebesgue an.

23. Für $0 \le a < b \le 1$ ist die „Dachfunktion“ durch

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & , \ 0 \le x \le a, \\ 2(x-a)/(b-a) & , \ a \le x \le (a+b)/2, \\ 2(b-x)/(b-a) & , \ (a+b)/2 \le x \le b, \\ 0 & , \ b \le x \le 1 \end{cases}$$

definiert. Man bestimme eine Lebesgue-integrierbare Funktion v, so dass für alle $\varphi \in C^1[0,1]$ gilt

$$\int_0^1 \varphi v\,dx = -\int_0^1 \phi\varphi'\,dx.$$

24. Für $u \in C^1[a,b]$ mit $u(a) = 0$ zeige man

   a) $\int_a^b |u(x)|^2\,dx \le (b-a)^2 \int_a^b |u'(x)|^2\,dx$;
   b) $\|u\|_{0,r} \le C\|u\|_{1,p}, \quad 1 \le r, p < \infty$.

   Man gebe die Konstante $C = C(a,b,r,p)$ genau an.

25. **(Bonusaufgabe)** Bestimmen Sie die schwache Ableitung der Funktion $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.