Prof. Dr. H.–J. Reinhardt
Prof. Dr. B. Dreseler
Stefan Schuß

Dept. Mathematik
Univ. Siegen

Übungsaufgaben (8)
zur Vorlesung „Einführung in die Funktionalanalysis“ im Wintersemester 2012/2013
(Abgabetermin: Mittwoch, 05.12.2012, 10 Uhr)

26. *Die duale Norm auf* $\mathbb{R}^n$: Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

    a) Durch
    $$\langle J(x), y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$
    wird eine lineare Abbildung $J : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)'$ definiert.

    b) $\|x\|^* = \|J(x)\|,\ x \in \mathbb{R}^n$, ist eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ (wir nennen sie *duale Norm* zu $\|\cdot\|$).

    c) Die Abbildung $J : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|^*) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)'$ ist ein isometrischer Isomorphismus.

27. *Der Dualraum von* c_0: Es sei
    $$\ell^\infty := \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \ \middle|\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\right\},\ c_0 := \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty \ \middle|\ \lim_{n\to\infty} x_n = 0\right\}.$$
    c_0 ist bekanntlich ein Banachraum bzgl. der Norm $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Zeigen Sie: Durch
    $$\langle J(y), x\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n x_n, \quad y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1, \quad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0,$$
    wird ein isometrischer Isomorphismus J von ℓ^1 nach c_0' definiert.

28. **Bonusaufgabe:** Für $1 \le p \le \infty$ berechne man die duale Norm zu
    $$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{für } 1 \le p < \infty \\ \max_{1\le i\le n} |x_i|, & \text{für } p = \infty \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Hinweis zu Aufg. 27:
$$c_0' = \ell^1 = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \middle| \sum_n |x_n| < \infty\right\}$$