Prof. Dr. H.–J. Reinhardt **Dept. Mathematik**
Stefan Schuß **Univ. Siegen**

Übungsaufgaben (9)
zur Vorlesung „Einführung in die Funktionalanalysis“ im Wintersemester 2012/2013

(Abgabetermin: Mittwoch, 12.12.2012, 10 Uhr)

29. Sei X metrischer Raum und D, X_0 Teilmengen von X.

    Zeigen Sie die Äquivalenz[1]:

    D dicht in $X_0 :\Longleftrightarrow \forall\, x \in X_0\, \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, z \in D : |x, z| < \varepsilon \Longleftrightarrow c\ell(D) \supset X_0$

30. Seien U und V abgeschlossene Unterräume des Hilbertraums H und P_U und P_V die entsprechenden Orthogonalprojektionen. Zeigen Sie

$$U \subset V \Longleftrightarrow P_U = P_V P_U = P_U P_V \,.$$

31. Sei X ein (komplexer) Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ und zugehöriger Norm $\|u\| = (x, x)^{1/2}$. Zeigen Sie

    (a) die „Parallelogrammidentität“: $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2,\ \forall\, x, y \in X\,.$

    (b) $(A^\perp)^\perp = A$ für jeden abgeschlossenen Unterraum $A \subset X$, wobei $A^\perp = \big\{x \in X \big| (x, z) = 0\, \forall\, z \in A\big\}$.

[1] $c\ell(D) = \overline{D} =$ Abschließung von $D = \big\{x \in X : |x, D| = 0\big\}$