

## 3 Integralsätze

»Alles fließt!« sagt Heraklit. Wir wollen diesen allumfassenden Ausspruch des griechischen Philosophen hier nicht ergründen, sondern ihn als Aufforderung verstehen, strömende Flüssigkeiten und Gase mit der Vektoranalysis zu untersuchen.

Dabei dringen wir zum Herzstück der Vektoranalysis vor, den *Integralsätzen von Gauß, Stokes und Green*. Man kann sie als Verallgemeinerungen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung aus dem »Eindimensionalen« auffassen. Ihre Anwendungen in Strömungslehre, Elektrodynamik und Teilchenphysik sind zahlreich und grundlegend.<sup>1</sup>

### 3.1 Der Gaußsche Integralsatz

Der Gaußsche Integralsatz ist im Grunde eine Binsenwahrheit. Wir wollen ihn am Beispiel strömender Flüssigkeiten formulieren:

Die Flüssigkeitsmenge, die durch die Oberfläche eines räumlichen Gebietes herausströmt, ist gleich der Flüssigkeitsmenge, die die Quellen in dem Gebiet hervorbringen.

Oder noch kürzer:

Es kann nur herausfließen, was die Quellen hergeben.

Nicht nur auf Flüssigkeiten lässt sich dies anwenden, sondern auch auf Gase, auf elektromagnetische Felder und Schwerefelder, ja, auf den Export eines Landes und seine Warenherstellung sowie auf die Herausgabe von Büchern durch die Verlage und deren Produktion durch ihre Autoren.

#### 3.1.1 Ergiebigkeit, Divergenz

*Zur Einführung:* Wir betrachten eine Flüssigkeit, die ein Gebiet  $M$  im dreidimensionalen Raum durchströmt. (Ein *Gebiet* ist eine offene, zusammenhängende Menge). Die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen wird in einem beliebigen Punkt  $\mathbf{x} \in M$  durch  $\mathbf{V}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$  angegeben, wobei wir der Einfachheit halber annehmen, dass  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$  nicht von der Zeit abhängt (»stationäre Strömung«). Das so beschriebene »Geschwindigkeitsfeld«  $\mathbf{V} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  wollen wir als stetig differenzierbar voraussetzen.

Im Gebiet  $M$  betrachten wir einen gedachten Quader  $Q$ , der von der Flüssigkeit durchströmt wird. (Der Quader bewegt sich bzgl.  $M$  nicht.) Durch einen Teil der Oberfläche des Quaders strömt Flüssigkeit hinein und durch einen anderen wieder heraus.

<sup>1</sup> s. auch Burg/Haf/Wille (Partielle Dgln.) [13].

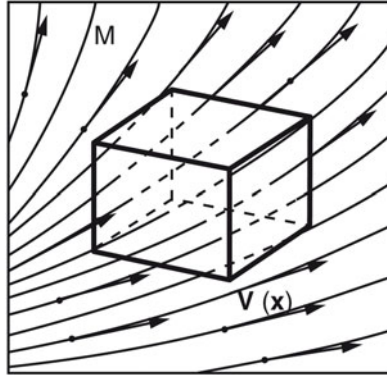


Fig. 3.1: Gedachter Quader in einer Strömung

Wir interessieren uns dabei für den »Überschuss«, d.h. für das herausfließende Volumen pro Zeiteinheit minus dem hereinfließenden Volumen pro Zeiteinheit. Wir wollen sozusagen das Flüssigkeitsvolumen bestimmen, welches »netto« in der Zeiteinheit aus  $Q$  herausfließt. Dieser Überschuss – kurz *Fluss* genannt – ist nach Abschnitt 2.2.2, (2.34), gleich dem Flächenintegral

$$U = \iint_{\partial Q} \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} , \tag{3.1}$$

wobei  $\partial Q$  die Oberfläche des Quaders ist, zusammengesetzt aus sechs Flächenstücken, den Seiten des Quaders. Die Orientierungen werden dabei so gewählt, dass die Normalenvektoren der Flächenstücke »nach außen weisen«. (D.h. heftet man Pfeile, die die Normalenvektoren darstellen, mit ihren Fußpunkten in den zugehörigen Oberflächenpunkten an, so sind sie in den Außenraum  $\mathbb{R}^3 \setminus Q$  gerichtet (wie bei einem Igel!)).

Dividiert man den Überschuss  $U$  durch das Volumen  $\Delta\tau = \Delta x \Delta y \Delta z$  des Quaders (wobei  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  die Seitenlängen des Quaders sind), so erhält man die »mittlere Ergiebigkeit« bzgl.  $Q$ :

$$E_Q := \frac{1}{\Delta\tau} \iint_{\partial Q} \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} . \tag{3.2}$$

Wir ziehen nun den Quader  $Q$  auf einen Punkt  $\mathbf{x}_0$  zusammen. Das soll heißen: Wir wählen eine beliebige Folge von achsenparallelen Quadern  $Q_n \subset M$ , die alle ein und denselben Punkt  $\mathbf{x}_0$  enthalten, wobei die Quaderdurchmesser  $|Q_n|$  gegen Null konvergieren.

Der Grenzwert von  $E_{Q_n}$ <sup>2</sup> heißt dann die *Ergiebigkeit des Feldes  $\mathbf{V}$  in  $\mathbf{x}_0$*  oder die *Divergenz von  $\mathbf{V}$  in  $\mathbf{x}_0$* . Zusammengefasst also:

---

<sup>2</sup> Die Existenz des Grenzwertes wird durch (3.1) gesichert.

**Definition 3.1:**

Es sei  $V : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  stetig differenzierbar auf der offenen Menge  $M \subset \mathbb{R}^3$ . Als *Divergenz von  $V$  in  $x_0 \in M$* , abgekürzt  $\operatorname{div} V(x_0)$ , bezeichnet man den Grenzwert

$$\operatorname{div} V(x_0) := \lim_{|Q| \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \iint_{\partial Q} V(x) \cdot d\sigma \quad (3.3)$$

Mit  $Q \subset M$  werden dabei achsenparallele Quader mit  $x_0 \in Q$  bezeichnet, mit  $|Q|$  ihre Durchmesser und mit  $\Delta\tau$  ihre Volumina.

Im Falle  $\operatorname{div} V(x_0) > 0$  nennt man  $x_0$  eine *Quelle* des Feldes  $V$ , im Falle  $\operatorname{div} V(x_0) < 0$  eine *Senke* (oder »negative Quelle«).

Glücklicherweise zeigt es sich, dass man die Divergenz leicht ausrechnen kann. Es gilt nämlich

**Satz 3.1:**

Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $V = [V_1, V_2, V_3]^T$  von  $M$  in  $\mathbb{R}^3$  ( $M$  offen in  $\mathbb{R}^3$ ) berechnet man die Divergenz nach folgender Formel

$$\operatorname{div} V = V_{1,x} + V_{2,y} + V_{3,z}. \quad (3.4)$$

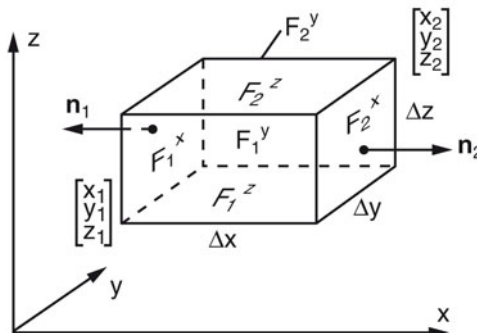


Fig. 3.2: Zur Divergenz

**Beweis:**

Zunächst berechnen wir explizit den Fluss  $U$  nach Formel (3.1).

Wir wählen dazu einen beliebigen Quader  $Q$  in  $M$ . Mit den Bezeichnungen der Figur 3.2 können wir den Seitenflächen  $F_1^x, F_2^x$  des Quaders  $Q$  folgende Parameterdarstellung geben. (Es

sind die kanonischen, s. Abschn. 2.1.3, Satz 2.1):

$$F_1^x : \mathbf{f}(u, v) = \begin{bmatrix} x_1 \\ v \\ u \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} y_1 \leq v \leq y_2, \\ z_1 \leq u \leq z_2, \end{cases}$$

$$F_2^x : \mathbf{g}(u, v) = \begin{bmatrix} x_2 \\ u \\ v \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} y_1 \leq u \leq y_2, \\ z_1 \leq v \leq z_2. \end{cases}$$

Sie sind so gewählt, dass  $\mathbf{f}_u \times \mathbf{f}_v = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{g}_u \times \mathbf{g}_v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  wird, dass also die Normalenvektoren nach außen weisen. Damit folgt für die zugehörigen Flächenintegrale:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &:= \iint_{F_2^x} \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} + \iint_{F_1^x} \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \\ &= \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} V_1(x_2, u, v) du dv - \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} V_1(x_1, v, u) dv du. \end{aligned}$$

Im ersten Integral rechts schreiben wir  $y$  statt  $u$  und  $z$  statt  $v$ , im zweiten umgekehrt  $y$  statt  $v$  und  $z$  statt  $u$ . Man kann damit die Integrale zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} (V_1(x_2, y, z) - V_1(x_1, y, z)) dy dz \\ &= \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \left( \int_{x_1}^{x_2} V_{1,x}(x, y, z) dx \right) dy dz = \iiint_Q V_{1,x}(\mathbf{x}) d\tau. \quad ^3 \end{aligned}$$

Bei der Umformung der eingeklammerten Differenz wurde der *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* ausgenutzt (s. Burg/Haf/Wille (Analysis) [14]).

Analog folgt für die übrigen Quaderseiten (s. Fig. 3.2)

$$\begin{aligned} \Phi_2 &:= \iint_{F_2^y} \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} + \iint_{F_1^y} \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_Q V_{2,y}(\mathbf{x}) d\tau, \\ \Phi_3 &:= \iint_{F_2^z} \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} + \iint_{F_1^z} \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_Q V_{3,z}(\mathbf{x}) d\tau. \end{aligned}$$

Das Integral über die gesamte Oberfläche  $\partial Q$  des Quaders ist damit gleich  $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$ , also

<sup>3</sup> Bei Raumintegralen (dreidimensional) benutzen wir hier das Symbol  $d\tau$  (statt  $dx$  oder  $dv$ , wie in Burg/Haf/Wille (Analysis) [14] allgemein verwendet).  $d\tau$  wird als »Volumenelement« bezeichnet, wobei man symbolisch  $d\tau = dx dy dz$  schreibt.

$$\iint_{\partial Q} \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_Q (V_{1,x} + V_{2,y} + V_{3,z}) d\tau^4 \quad (3.5)$$

Damit folgt für die mittlere Ergiebigkeit bzgl.  $Q$ :

$$E_Q = \frac{1}{\Delta\tau} \iiint_Q (V_{1,x} + V_{2,y} + V_{3,z})(\mathbf{x}) d\tau, \quad (3.6)$$

mit dem Quadvolumen  $\Delta\tau = \Delta x \Delta y \Delta z$  (s. Fig. 3.2). Wir ziehen jetzt den *Mittelwertsatz der Integralrechnung für Mehrfachintegrale* heran (s. Burg/Haf/Wille (Analysis) [14]). Damit verwandeln wir (3.6) in

$$E_Q = \frac{1}{\Delta\tau} (V_{1,x} + V_{2,y} + V_{3,z})(\mathbf{x}^*) \Delta\tau, \quad (3.7)$$

mit einem  $\mathbf{x}^* \in Q$ . Die  $\Delta\tau$  kürzen sich hier weg. Ziehen wir  $Q$  nun auf seinen Mittelpunkt  $\mathbf{x}_0$  zusammen, so folgt

$$\operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{x}_0) = \lim_{|Q| \rightarrow 0} E_Q = (V_{1,x} + V_{2,x} + V_{3,x})(\mathbf{x}). \quad (3.8)$$

Da  $\mathbf{x}_0$  hier ein beliebiger Punkt aus  $M$  sein kann, ist der Satz bewiesen.  $\square$

**Bemerkung:** Der vorstehende Beweis ist im Prinzip ganz einfach: Es wird der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung benutzt, in jeder Achsenrichtung einmal, und dann der Mittelwertsatz für Bereichsintegrale angewendet. Das ist alles!

*Quellenfreiheit:* Man nennt  $\mathbf{V}$  genau dann *quellenfrei*, wenn im ganzen Definitionsgebiet von  $\mathbf{V}$  die Gleichung  $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$  gilt.

### Folgerung 3.1:

(*Rechenregeln für die Divergenz*) Es seien  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{W}$  Vektorfelder und  $\varphi$  ein Skalarfeld, alle stetig differenzierbar auf  $M \subset \mathbb{R}^3$ . Dann gilt

$$\operatorname{div}(\mathbf{V} + \mathbf{W}) = \operatorname{div} \mathbf{V} + \operatorname{div} \mathbf{W}, \quad \operatorname{div}(\lambda \mathbf{V}) = \lambda \operatorname{div} \mathbf{V} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad (3.9)$$

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{V}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \operatorname{grad} \varphi \quad (3.10)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{x} = 3 \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3) \quad (3.11)$$

$$\operatorname{div}(f(r)\mathbf{x}) = 3f(r) + \mathbf{x} \cdot \operatorname{grad} f(r) \quad (r = |\mathbf{x}|, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ stetig differenzierbar}). \quad (3.12)$$

Wegen (3.9) nennt man  $\operatorname{div}$  einen *linearen Differentialoperator*. (3.12) beschreibt den Fall eines kugelsymmetrischen Feldes.

4 Die Variablenangabe  $(\mathbf{x})$  nach den Funktionssymbolen wurde zur besseren Übersicht weggelassen.

5 Es stellt sich später heraus, dass diese Formel schon der Gaußsche Integralsatz für Quader ist.

**Übung 3.1:**

Beweise die Formeln in Folgerung 3.1.

**3.1.2 Der Gaußsche Integralsatz für Bereiche mit stückweise glattem Rand**

Es sei  $V : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  wieder ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge  $M \subset \mathbb{R}^3$  und  $Q$  ein achsenparalleler Quader in  $M$ . Damit gilt insbesondere Formel (3.5) im vorigen Abschnitt. Setzt man darin  $\operatorname{div} V = V_{1,x} + V_{2,y} + V_{3,z}$  ein, so erhält man sofort den *Gaußschen Integralsatz für Quader*

$$\iint_{\partial Q} V \cdot d\sigma = \iiint_Q \operatorname{div} V d\tau. \quad (3.13)$$

Aus diesem elementaren Fall leiten wir den Gaußschen Satz für allgemeine Bereiche her. Den einfachen Grundgedanken dabei erläutern wir an folgendem Fall:

**Gaußscher Integralsatz für quaderzerlegbare Bereiche**

Es sei  $B$  eine kompakte Menge im  $\mathbb{R}^3$ , die sich in endlich viele Quader  $Q_1, \dots, Q_n$  zerlegen lässt, und  $V : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  darauf stetig differenzierbar (s. Fig. 3.3).

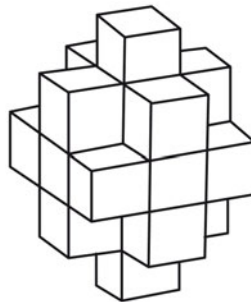


Fig. 3.3: Quaderzerlegbarer Bereich  $B$

Für jeden Quader  $Q_k$  schreibe man die Formel des Gaußschen Integralsatzes (3.13) hin und summiere diese Gleichungen über alle  $k = 1, \dots, n$ . Es entsteht dann die Formel

$$\iint_{\partial B} V \cdot d\sigma = \iiint_B \operatorname{div} V d\tau, \quad (3.14)$$

denn auf der rechten Seite ist dies unmittelbar klar. Auf der linken Seite gilt dies auch, da sich bei der Summation alle Integrale über Flächenstücke im Inneren von  $B$  wegheben. (Denn über sie wird zweimal integriert, wobei die Richtungen der Flächennormalen entgegengesetzt sind.) Die Normalen auf  $\partial B$  sind dabei nach außen gerichtet.

Der *Gaußsche Integralsatz* gilt also für *quaderzerlegbare Bereiche*  $B$  (s. (3.14)).

Da man aber alle messbaren<sup>6</sup> Mengen  $M$  im  $\mathbb{R}^3$  — und damit alle physikalisch wichtigen — durch quaderzerlegbare Bereiche beliebig gut approximieren kann, ist zu erwarten, dass man durch Grenzübergang den Gaußschen Satz für diese Mengen  $M$  erhält (sofern  $\partial M$  eine vernünftige Fläche ist).

Für die Volumenintegrale rechts in (3.14) geht das auch problemlos. Für die Flächenintegrale links ist das jedoch nicht ohne weiteres zu erkennen, da z.B. die Flächenintegrale bei dieser Approximation nicht unbedingt gegen den Flächeninhalt von  $\partial M$  konvergieren.

Trotzdem ist der Grundgedanke dieser Approximation in Ordnung. Er führt — über Zusatzüberlegungen — zum Gaußschen Integralsatz für Bereiche mit »stückweise glattem Rand«. Dies wird im Folgenden beschrieben.

### Definition 3.2:

Eine kompakte Menge  $B \subset \mathbb{R}^3$  heißt ein *Bereich mit stückweise glattem Rand*, wenn sie von der Form  $B = \bar{B}_0$  ( $B_0$  offen) ist und  $\partial B$  eine »Fläche« ist, d.h. sich aus endlich vielen Flächenstücken zusammensetzt (s. Fig. 3.4). Jede Parameterdarstellung  $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  eines solchen Flächenstückes sei stetig differenzierbar, umkehrbar eindeutig auf  $\bar{D}$  und erfülle  $\text{Rang } f' = 2$  auf ganz  $\bar{D}$ .  $D$  sei dabei ein Gebiet, das von endlich vielen stückweise glatten Kurven berandet wird. Die Normalenvektoren auf  $\partial B$  weisen nach außen.  $\partial B$  wird die *Oberfläche* des Bereichs genannt.

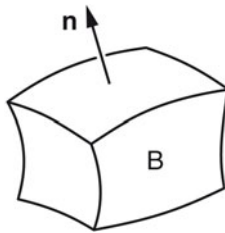


Fig. 3.4: Bereich mit stückweise glattem Rand

### Bemerkung:

- (a) Quader, Kugeln, Kegel, Prismen, platonische Körper usw., sowie Zusammensetzungen daraus, fallen unter die obige Definition. Dies, wie auch Figur 3.4 machen deutlich, dass praktisch alle Fälle technischer und physikalischer Anwendungen darunter fallen.
- (b)  $B$  ist *messbar* (d.h.  $B$  hat ein wohldefiniertes Volumen, denn der Rand  $\partial B$  ist eine Nullmenge; vgl. Burg/Haf/Wille (Analysis) [14]). Damit folgt

<sup>6</sup> gemeint ist hier Riemann-messbar (s. Burg/Haf/Wille (Analysis) [14]).

**Satz 3.2:**

(Gaußscher Integralsatz) Ist  $V : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einem Bereich  $B \subset \mathbb{R}^3$  mit stückweise glattem Rand, so gilt

$$\iint_{\partial B} \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_B \operatorname{div} \mathbf{V} d\tau . \quad (3.15)$$

Der Beweis wird in Abschnitt 3.1.4 geführt.

Wichtig für den Anwender ist die physikalische Deutung, die im Folgenden noch einmal an Hand von Strömungen gegeben wird.

**Physikalische Interpretation des Gaußschen Satzes**

Es sei  $V$  wieder ein Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit (oder eines Gases). Das Flächenintegral links in (3.15) ergibt den *Überschuss* an Flüssigkeitsvolumen, das aus  $B$  pro Zeiteinheit herausströmt (also Herausfließendes minus Hineinfließendes). Rechts in (3.15) steht die »Summe«<sup>7</sup> der Ergiebigkeiten aller Quellen oder Senken (bei Senken »negative Ergiebigkeit«). Somit

Der Überschuss des ausströmenden Flüssigkeitsvolumens gleicht dem, was die Quellen insgesamt liefern.

*Punktförmige Quellen*, die sich *stetig* über ganze Gebiete  $A$  verteilen ( $\operatorname{div} V(\mathbf{x}) > 0$  in ganz  $A$ ), kommen z.B. vor, wenn man die Flüssigkeit oder das Gas erwärmt, oder — bei Gasen — wenn Expansionen durch Druckunterschiede auftreten.

Analoge Anwendungen gibt es bei Kraftfeldern, insbesondere elektrischen und magnetischen.

Für all dies reichen die betrachteten Bereiche mit stückweise glattem Rand vollständig aus.

**Übung 3.2:**

Verifiziere die Formel (3.15) des Gaußschen Satzes für die Einheitskugel  $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| \leq 1\}$  und das Vektorfeld  $V(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2 \mathbf{x}$  auf  $\mathbb{R}^3$ .

**3.1.3 Die Kettenregel der Divergenz**

<sup>8</sup> Ein  $C^2$ -Diffeomorphismus ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung  $T : M^* \rightarrow M$ , wobei  $T$  und  $T^{-1}$  zweimal stetig differenzierbar sind. Damit beweisen wir

**Satz 3.3:**

Es sei  $V : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  ( $\mathbf{v} = V(\mathbf{x})$ ) ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge  $M \subset \mathbb{R}^3$ . Durch  $T : M^* \rightarrow M$  ( $\mathbf{x} = T(\mathbf{y})$ ), sei ein  $C^2$ -Diffeomorphismus

<sup>7</sup> Man denke an approximierende Riemannsche Summen.

<sup>8</sup> Kann beim ersten Lesen übersprungen werden.



gegeben. Dann gilt für die Abbildung

$$\mathbf{V}^* = (\det \mathbf{T}')(\mathbf{T}')^{-1} \mathbf{V} \circ \mathbf{T} \quad 9$$

die »Kettenregel der Divergenz«:

$$\operatorname{div}_y \mathbf{V}^*(\mathbf{y}) = \det \mathbf{T}'(\mathbf{y}) \operatorname{div}_x \mathbf{V}(\mathbf{x}) \circ \mathbf{T}(\mathbf{y}) \quad \text{mit } \mathbf{x} = \mathbf{T}(\mathbf{y}),$$

oder kürzer geschrieben

$$\operatorname{div}_y \mathbf{V}^* = (\det \mathbf{T}')(\operatorname{div}_x \mathbf{V}) \circ \mathbf{T}. \quad (3.16)$$

(Die Indizes  $\mathbf{y}$  und  $\mathbf{x}$  an  $\operatorname{div}$  markieren die Variablen, nach denen differenziert wird.)

### Beweis:

Es seien  $V_i, V_i^*, x_i, y_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) die Komponenten von  $\mathbf{V}, \mathbf{V}^*, \mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$ . Wir legen die explizite Darstellung von  $\mathbf{V}^*$  in Abschnitt 2.2.3, Folgerung 2.2, (2.38), zu Grunde und berechnen damit

$$V_{1,y_1}^* = \frac{\partial}{\partial y_1} \det(\mathbf{V} \circ \mathbf{T}, \mathbf{T}_{y_2}, \mathbf{T}_{y_3}) \quad 10 = \det\left(\frac{\partial}{\partial y_1} \mathbf{V} \circ \mathbf{T}, \mathbf{T}_{y_2}, \mathbf{T}_{y_3}\right) + D_{21} + D_{31}$$

mit  $D_{21} := \det(\mathbf{V} \circ \mathbf{T}, \mathbf{T}_{y_2 y_1}, \mathbf{T}_{y_3}), D_{31} := \det(\mathbf{V} \circ \mathbf{T}, \mathbf{T}_{y_2}, \mathbf{T}_{y_3 y_1})$ .

Entsprechend werden  $V_{2,y_2}^*$  und  $V_{3,y_3}^*$  gebildet. Bei der Summation der  $V_{i,y_i}^*$  heben sich alle  $D_{ik}$  weg. Mit  $\frac{\partial}{\partial y_i} \mathbf{V} \circ \mathbf{T}(\mathbf{y}) = \mathbf{V}'(\mathbf{x}) \mathbf{T}_{y_i}(\mathbf{y}), \mathbf{x} = \mathbf{T}(\mathbf{y})$ , (nach üblicher Kettenregel), folgt damit

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_y \mathbf{V}^* &= V_{1,y_1}^* + V_{2,y_2}^* + V_{3,y_3}^* \\ &= \det(\mathbf{V}' \mathbf{T}_{y_1}, \mathbf{T}_{y_2}, \mathbf{T}_{y_3}) + \det(\mathbf{T}_{y_1}, \mathbf{V}' \mathbf{T}_{y_2}, \mathbf{T}_{y_3}) + \det(\mathbf{T}_{y_1}, \mathbf{T}_{y_2}, \mathbf{V}' \mathbf{T}_{y_3}), \end{aligned} \quad (3.17)$$

wobei Variablenangaben ( $\mathbf{x}$ ) nach  $\mathbf{V}'$  und ( $\mathbf{y}$ ) nach  $\mathbf{T}_{y_i}$  weggelassen sind. Setzt man im folgenden Hilfssatz nun  $A = \mathbf{T}'$  und  $B = \mathbf{V}'$ , so folgt (3.16).  $\square$

### Hilfssatz 3.1:

Für je zwei reelle  $n \times n$ -Matrizen  $A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  und  $B = (b_{ik})_{n,n}$  gilt die Formel

$$\sum_{k=1}^n \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-1}, B \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n) = (\det A) \sum_{i=1}^n b_{ii} \quad (3.18)$$

9  $\mathbf{V}^*$  ist uns bei der Transformation von Flächenintegralen schon begegnet, s. Abschn. 2.2.3.

10 Zur Erinnerung sei die Ableitungsregel für Determinanten erwähnt:

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}', \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}', \mathbf{w}) + \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}').$$

**Beweis:**

Im Falle  $\sum_{i=1}^n b_{ii} \neq 0$  dividiert man die linke Seite von (3.18) durch die Summe und nennt den Quotienten  $f(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ . Die Funktion  $f$  ist zweifellos in jeder Variablen  $\mathbf{a}_i$  linear, ferner alternierend (Vertauschung zweier Variabler ändert das Vorzeichen), und es gilt  $f(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$  ( $\mathbf{e}_i$  Koordinaten-Einheitsvektoren). Nach dem Eindeutigkeitsatz für Determinanten (s. Burg/Haf/Wille (Lineare Algebra) [11]) ist damit  $f(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \det A$ , d.h. es gilt (3.18). Den Fall  $\sum_{i=1}^n b_{ii} = 0$  gewinnt man durch Grenzübergang.  $\square$

**3.1.4 Beweis des Gaußschen Integralsatzes für Bereiche mit stückweise glattem Rand**

<sup>11</sup> Wir wollen eine Menge  $B \subset \mathbb{R}^3$  einen *Gaußschen Bereich* nennen, wenn für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld  $V$  auf  $B$  der Gaußsche Integralsatz gilt, d.h.

$$\iint_{\partial B} \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_B \operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{x}) d\tau. \quad (3.19)$$

Dabei ist  $\partial B$  eine Fläche mit nach außen weisenden Normalen.

Bisher wissen wir nur, dass achsenparallele Quader Gaußsche Bereiche sind. Von ihnen gehen wir aus. Durch Verformen und Zusammensetzen gelangt man zu allgemeinen Gaußschen Bereichen. Der folgende Satz erlaubt weitreichende Verformungen.

**Satz 3.4:**

(*Transformation Gaußscher Bereiche*) Ist  $B^*$  ein Gaußscher Bereich und  $T : B^* \rightarrow B$  ein  $C^2$ -Diffeomorphismus<sup>12</sup> mit  $\det T' > 0$ , so ist auch der Bildbereich  $B$  ein Gaußscher Bereich.

**Beweis:**

- (i) Es sei  $V : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein beliebiges stetig differenzierbares Vektorfeld. Mit der Transformationsformel für Flächenintegrale (Abschn. 2.2.3, (2.37)) gilt

$$\iint_{\partial B} \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iint_{\partial B^*} \mathbf{V}^* \cdot d\boldsymbol{\sigma}^* \stackrel{(a)}{=} \iiint_{B^*} \operatorname{div} \mathbf{V}^* d\tau^* \quad {}^{13} \text{ mit } \mathbf{V}^* = \det T'(T')^{-1} \mathbf{V} \circ T. \quad (3.20)$$

Aus der Tatsache, dass die *Normalenvektoren* von  $\partial B$  nach außen weisen, folgt das gleiche für  $\partial B^*$  (wir beweisen dies später in (ii)). Die Gleichung (a) gilt, da  $B^*$  als Gaußscher Bereich vorausgesetzt ist.

Durch Anwendung der Kettenregel für die Divergenz (Abschn. 3.1.3) und dann der Trans-

<sup>11</sup> Der anwendungsorientierte Leser kann diesen Abschnitt überschlagen.

<sup>12</sup>  $T$  umkehrbar eindeutig;  $T, T^{-1}$  zweimal stetig differenzierbar.

<sup>13</sup>  $d\tau^*$  ist das Volumenelement in  $B^*$ .

formationsformel für Bereichsintegrale <sup>14</sup> folgt

$$\iiint_{B^*} \operatorname{div} V^* d\tau^* = \iiint_{B^*} (\operatorname{div} V) \circ T \underbrace{(\det T')}_{d\tau} = \iiint_B \operatorname{div} V d\tau$$

und damit

$$\iint_{\partial B} V \cdot d\sigma = \iiint_B \operatorname{div} V d\tau .$$

$B$  ist also ein Gaußscher Bereich.

- (ii) *Nachtrag:* Es bleibt zu beweisen, dass die Normalenvektoren auf  $\partial B^*$  nach außen weisen, wobei vorausgesetzt ist, dass dies für  $\partial B$  gilt.

Man sieht das so ein: Ist  $f^*$  Parameterdarstellung eines Flächenstückes von  $\partial B^*$ , so  $f = T \circ f^*$  entsprechend von  $\partial B$ . Wir betrachten  $f_u = T' f_u^*, f_v = T' f_v^*$  in einem Punkt  $x_0 = T(x_0^*)$  von  $\partial B$ . Mit einem kleinen Vektor  $\Delta x^* = x^* - x_0^*$  ( $x^* \in \overset{\circ}{B}^*$ ), der von  $x_0^*$  aus in  $\overset{\circ}{B}^*$  hineinragt (in umgekehrter Normalenrichtung), weist auch  $\Delta x = T' \Delta x^* \approx T(x^*) - T(x_0^*)$  von  $x_0$  aus in  $\overset{\circ}{B}$  <sup>15</sup> hinein. Es gilt daher  $(f_u \times f_v) \cdot \Delta x < 0$ , weil  $f_u \times f_v$  nach außen weist. Damit folgt

$$\begin{aligned} 0 > (f_u \times f_v) \cdot \Delta x &= \det(f_u, f_v, \Delta x) = \det(T' f_u^*, T' f_v^*, T' \Delta x^*) \\ &= (\det T') \det(f_u^*, f_v^*, \Delta x^*) = (\det T') (f_u^* \times f_v^*) \cdot \Delta x^* . \end{aligned} \quad (3.21)$$

Wegen  $\det T' > 0$  gilt also  $(f_u^* \times f_v^*) \cdot \Delta x^* < 0$ , d.h.  $f_u^* \times f_v^*$  weist nach außen, folglich auch der zugehörige Normalenvektor  $n^* = f_u^* \times f_v^* / |f_u^* \times f_v^*|$ .  $\square$

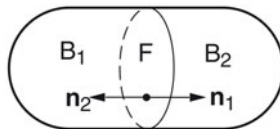


Fig. 3.5: Zusammensetzen Gaußscher Bereiche

Ferner gilt die einfache

**Folgerung 3.2:**

Setzt man zwei Gaußsche Bereiche  $B_1, B_2$  zu einem Bereich  $B = B_1 \cup B_2$  zusammen, wobei  $B_1 \cap B_2$  ein Flächenstück  $F$  aus  $\partial B_1 \cap \partial B_2$  ist, so ist auch  $B$  ein Gaußscher Bereich, (s. Fig. 3.5).

<sup>14</sup> s. Burg/Haf/Wille (Analysis) [14].

<sup>15</sup>  $\overset{\circ}{B}$  ist das Innere von  $B$ .

**Beweis:**

Die Aussage folgt aus der Tatsache, dass sich bei der Summation der Formeln des Gaußschen Satzes für  $B_1$  und  $B_2$  die Flächenintegrale über  $F$  herausheben.  $\square$

Satz 3.4 und Folgerung 3.2 liefern nun alles Wünschenswerte!

Zunächst: Durch Bewegungen ( $T(x) = Ax + b$ ,  $A$  orthogonal,  $\det A = 1$ ) oder allgemeiner affine Verzerrungen ( $T(x) = Ax + b$ ,  $\det A > 0$ ) gehen Gaußsche Bereiche in Gaußsche Bereiche über.

Ferner betrachten wir die folgenden wichtigen Beispiele.

**Beispiel 3.1:**

- (a) In der Figur 3.6 sei  $F$  ein Graph einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion  $z = g(x, y) > 0$ . Der Quader  $Q$  wird durch

$$T(x, y, z) = \left[ x, y, \frac{1}{h}g(x, y) \right]^T$$

auf den Bereich  $B$ , der unterhalb von  $F$  in  $Q$  liegt, gestaucht.  $B$  ist also Gaußscher Bereich. Ist  $g$  nur *einmal stetig differenzierbar*, erhalten wir das gleiche Ergebnis, indem wir  $g$  durch eine Folge ( $g_n$ ) approximieren ( $g_n \rightarrow g, g'_n \rightarrow g'$  gleichmäßig,  $g_n$  stetig differenzierbar).<sup>16</sup>

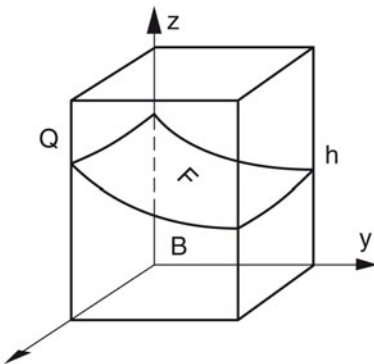


Fig. 3.6: Stauchung von  $Q$  auf  $B$

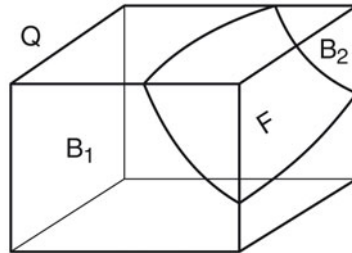


Fig. 3.7: Zerlegung von  $Q$  in zwei Bereiche  $B_1, B_2$  durch das Flächenstück  $F$

- (b) Zerlegt ein »nahezu ebenes« Flächenstück  $F$  einen Quader  $Q$  in zwei zusammenhängende Bereiche  $B_1, B_2$  (s. Fig. 3.7), so ist jeder dieser Bereiche ein Gaußscher Bereich. »Nahezu eben« soll bedeuten, dass  $F$  als Graph einer stetig differenzierbaren Funktion  $z = g(x, y)$  aufgefasst werden kann (wobei  $x, y, z$  auch die Rollen tauschen können), und  $\partial Q \cap F$  eine stückweise glatte Kurve ist. — Begründung:

Man wähle eine (feine) Quaderzerlegung von  $Q$  und entferne zunächst alle Teilquader, die

<sup>16</sup> s. auch [1], S. 365–366.

die »Randkurve«  $\partial Q \cap F$  schneiden. Jeden weiteren Teilquader  $Q_k$ , der  $F$  schneidet, verlängere man zu einer »Säule«, indem man alle darüber- und darunterliegenden Quader »anklebt«. <sup>17</sup> Der unter  $F$  liegende Teil der Säule ist nach (a) ein Gaußscher Bereich. Diese Bereiche und alle restlichen Quader, die in  $B_1$  liegen, bilden zusammen einen Gaußschen Bereich, der gleich  $B_1$  ohne die  $\partial Q \cap F$  schneidenden Teilquader ist. Grenzübergang (beliebige Verfeinerung) ergibt, dass  $B_1$  Gaußscher Bereich ist ( $B_2$  analog).

Damit setzen wir den strahlenden Schlusspunkt:

*Beweis* des Satzes 3.2 (Gaußscher Integralsatz für Bereiche mit stückweise glattem Rand). Man bettet  $B$  in einen Quader  $Q$  ein:  $B \subset Q$ , zerlegt diesen in endlich viele Teilquader und betrachtet die Teilquader, die  $B$  schneiden. Sie seien  $Q_1, \dots, Q_n$  genannt.

Zunächst nehmen wir alle Quader  $Q_k$  weg, die Kanten <sup>18</sup> von  $B$  schneiden.

Die übrigen  $Q_k$  liegen entweder ganz oder teilweise in  $B$ . Von jedem Teilquader  $Q_k$  der letzteren Art können wir annehmen, dass er von  $\partial B$  in zwei zusammenhängende Teile zerlegt wird. (Denn  $\partial B \cap Q_k$  ist bei genügend feiner Quaderzerlegung nahezu eben. Eine geringfügige Vergrößerung von  $Q_k$  in den Außenraum von  $B$  hinein tut evtl. das Übrige). Jeder dieser Teile ist daher ein Gaußscher Bereich (s. Beisp. 3.1(b)).

Damit ist die Vereinigung aller  $Q_k \cap B \neq \emptyset$ , die keine Kantenstücke von  $B$  enthalten, ein Gaußscher Bereich. Die  $Q_k \cap B$ , die Kantenstücke von  $B$  enthalten, liefern bei Flächen- oder Raumintegralen aber beliebig kleine Anteile, wenn die Quaderzerlegung genügend fein ist. Grenzübergang (d.h. maximale Kantenlänge der Teilquader gegen Null) ergibt dann die Gültigkeit des Gaußschen Satzes für  $B$ .  $\square$

### Folgerung 3.3:

Der Gaußsche Integralsatz gilt für alle Polyeder. (Ein »Polyeder« ist eine kompakte Menge  $M \subset \mathbb{R}^3$  mit  $M = \bar{M}_0$  ( $M_0$  offen), die von endlich vielen Ebenenstücken berandet wird.)

### 3.1.5 Gaußscher und Greenscher Integralsatz in der Ebene

Aus dem Gaußschen Integralsatz im  $\mathbb{R}^3$  gewinnt man den Gaußschen Integralsatz im  $\mathbb{R}^2$  durch geeignete Reduzierung um eine Koordinate. Dies geschieht auf folgende Weise:

Es sei  $D$  ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet im  $\mathbb{R}^2$ , welches von einer geschlossenen, stückweise glatten Kurve  $K : \mathbf{x} = \boldsymbol{\gamma}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , berandet ist.

Dabei soll  $D$  »links von der Kurve liegen«. (D.h. der Normalenvektor  $N_{\boldsymbol{\gamma}}(t)$  weist, von  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\gamma}(t)$  aus gesehen, in  $D$  hinein.) Man sagt auch: » $D$  wird von der Kurve positiv umlaufen«.

Auf  $\bar{D}$  sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $V$  gegeben:

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

<sup>17</sup> »darüber« und »darunter« bzgl. einer senkrechten  $z$ -Achse.

<sup>18</sup> dies sind die Ränder der Flächenstücke, aus denen sich  $\partial B$  zusammensetzt.

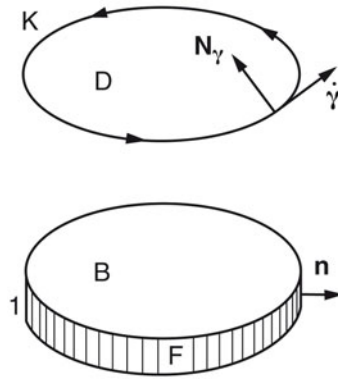


Fig. 3.8: Bereich B

Wir bilden nun aus  $\bar{D}$  den räumlichen Bereich

$$B = \bar{D} \times [0,1] = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \bar{D}, z \in [0,1] \right\},$$

d.h.  $\bar{D}$  wird in eine »Scheibe der Dicke 1« verwandelt, wobei »Boden« und »Deckel« der Scheibe die Form von  $\bar{D}$  haben, (s. Fig. 3.8). Ferner erweitern wir  $V$  um die Komponente  $V_3 = 0$ :

$$\tilde{V} : \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ 0 \end{bmatrix} : B \rightarrow \mathbb{R}^3 \tag{3.22}$$

und wenden den Gaußschen Integralsatz an:

$$\iint_{\partial B} \tilde{V} \cdot d\sigma = \iiint_B \operatorname{div} \tilde{V} \cdot d\tau. \tag{3.23}$$

Beim Flächenintegral links heben sich die Anteile bzgl. Boden und Deckel weg, da die zugehörigen Normalenvektoren entgegengesetzt sind, aber sonst alles gleich ist (insbesondere  $\tilde{V}(x, y, 0) = \tilde{V}(x, y, 1)$ ). Bezeichnet  $F = K \times [0,1]$  die »Mantelfläche« der Scheibe (in Fig. 3.8 schraffiert), so folgt aus (3.23)

$$\iint_F \tilde{V} \cdot d\sigma = \iiint_B \operatorname{div} \tilde{V} \cdot d\tau. \tag{3.24}$$

$F$  hat die Parameterdarstellung  $f(t, z) = [\gamma_1(t), \gamma_2(t), z]^T$  mit  $a \leq t \leq b, 0 \leq z \leq 1$ , woraus man die Flächennormale  $n = [\dot{\gamma}_2, -\dot{\gamma}_1, 0]^T$  berechnet. (Sie weist nach außen). Damit wird

$d\sigma = \mathbf{n} dt dz$ , also gilt für die linke Seite von (3.24)

$$\iint_F \tilde{\mathbf{V}}(\boldsymbol{\gamma}(t)) \cdot \mathbf{n}(t) dt dz = \int_0^1 \int_a^b \left[ V_1(\boldsymbol{\gamma}(t)) \dot{\gamma}_2(t) - V_2(\boldsymbol{\gamma}(t)) \dot{\gamma}_1(t) \right] dt dz.$$

Die äußere Integration  $\int_0^1 \dots dz$  kann dabei gestrichen werden, da der Integrand nicht von  $z$  abhängt. Setzt man ferner  $\text{div } \tilde{\mathbf{V}} = V_{1,x} + V_{2,y}$  in die rechte Seite ein, so folgt nach Ausrechnung des Integrals:

**Satz 3.5:**

(Gaußscher Integralsatz in der Ebene) Es sei  $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld, wobei das einfach zusammenhängende Gebiet  $D$  durch die stückweise glatte Kurve  $K : \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  berandet wird, die  $D$  positiv umläuft. Damit gilt

$$\int_a^b \left[ V_1(\boldsymbol{\gamma}(t)) \dot{\gamma}_2(t) - V_2(\boldsymbol{\gamma}(t)) \dot{\gamma}_1(t) \right] dt = \iint_{\bar{D}} \left[ V_{1,x}(x, y) + V_{2,y}(x, y) \right] d(x, y). \quad (3.25)$$

Mit

$$\text{div } \mathbf{V} := V_{1,x} + V_{2,y} \quad (3.26)$$

(analog zum  $\mathbb{R}^3$ ) und den Symbolen  $dx = \dot{\gamma}_1(t) dt$ ,  $dy = \dot{\gamma}_2(t) dt$  beschreibt man (3.25) auch in der prägnanten Form

$$\int_K (V_1 dy - V_2 dx) = \iint_{\bar{D}} \text{div } \mathbf{V} d(x, y). \quad (3.27)$$

Nimmt man folgende Umbenennung vor:

$$W_1 = V_2, \quad W_2 = -V_1, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}.$$

so folgt:

**Greenscher Integralsatz in der Ebene**

$$\int_K (W_1 dx + W_2 dy) = \iint_{\bar{D}} (W_{2,x} - W_{1,y}) d(x, y) \quad (3.28)$$

<sup>19</sup> Das Kurvenintegral links heißt *Fluss* von  $\mathbf{V}$  durch  $K$  (s. Abschn. 3.1.1).

**Bemerkung:** Beide Integralsätze, (3.27) und (3.28) gelten auch für Gebiete  $G$ , die sich in endlich viele einfach zusammenhängende Gebiete  $D_k$  zerlegen lassen, wobei die  $D_k$  stückweise glatt berandet sind.

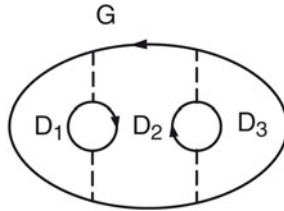


Fig. 3.9: Integrationsbereich, nicht einfach zusammenhängend

Dabei ist links über den gesamten Rand von  $G$  zu integrieren, wobei die Orientierungen der Randkurven von den Randkurven auf  $\partial D_k$  erzeugt werden, (s. Fig. 3.9). Das heißt  $G$  liegt stets »links« von den Randkurven auf  $\partial G$ .

**Übung 3.3:**

Verifiziere den Gaußschen Integralsatz der Ebene für die Einheitskreisscheibe  $D$  und  $V_1(x, y) = x^2 - 5xy + 3y$ ,  $V_2(x, y) = 6xy^2 - x$ .

**3.1.6 Der Gaußsche Integralsatz für Skalarfelder**

Es sei  $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}$  ein stetig differenzierbares Skalarfeld auf einem Gaußschen Bereich  $B \subset \mathbb{R}^3$ . Mit einem beliebigen Vektor  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  bilden wir das Vektorfeld  $\mathbf{V} = \varphi \mathbf{a}$  auf  $B$  und schreiben dafür den Gaußschen Integralsatz hin.

$$\iint_{\partial B} \varphi(\mathbf{x}) \mathbf{a} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_B \operatorname{div}(\varphi(\mathbf{x}) \mathbf{a}) d\tau. \tag{3.29}$$

Mit  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]^T$  errechnet man

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{a}) = a_1 \varphi_x + a_2 \varphi_y + a_3 \varphi_z = \mathbf{a} \cdot \operatorname{grad} \varphi,$$

also folgt aus (3.29):

$$\mathbf{a} \cdot \iint_{\partial B} \varphi(\mathbf{x}) d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{a} \cdot \iiint_B \operatorname{grad} \varphi(\mathbf{x}) d\tau \tag{3.30}$$

mit  $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n} d\sigma$ , wobei  $\mathbf{n}$  die nach außen weisende Normale auf  $\partial B$  bezeichnet. Die Integrale werden komponentenweise gebildet. Da (3.30) für alle  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  gilt, erhält man:

---

20 Das Kurvenintegral links heißt *Zirkulation* von  $\mathbf{V}$  längs  $K$  (s. Abschn. 3.2.2).



**Gaußscher Integralsatz für Skalarfelder**

$$\iint_{\partial B} \varphi(\mathbf{x}) \, d\sigma = \iiint_B \operatorname{grad} \varphi(\mathbf{x}) \, d\tau \quad (3.31)$$

**Bemerkung:** Setzt sich  $\partial B$  aus den Flächenstücken  $F_i : \bar{D}_i \rightarrow \mathbb{R}^3$  zusammen, so lautet die Formel explizit:

$$\sum_i \iint_{F_i} \varphi(\mathbf{f}^{(i)}(u, v)) (\mathbf{f}_u^{(i)} \times \mathbf{f}_v^{(i)})(u, v) \, d(u, v) = \begin{bmatrix} \iiint_B \varphi_x(\mathbf{x}) \, d\tau \\ \iiint_B \varphi_y(\mathbf{x}) \, d\tau \\ \iiint_B \varphi_z(\mathbf{x}) \, d\tau \end{bmatrix}.$$

Alle Volumenintegrale  $\iiint$  werden dabei über  $B$  genommen.

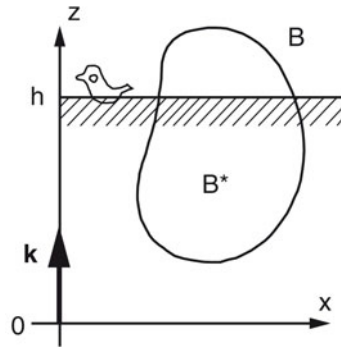


Fig. 3.10: Zum Auftrieb eines schwimmenden Körpers

**Folgerung 3.4:**

Für jeden Bereich  $B \subset \mathbb{R}^3$  mit stückweise glattem Rand gilt

$$\iint_{\partial B} d\sigma = \mathbf{0}.$$

**Beweis:**

Dies folgt unmittelbar aus (3.31) mit  $\varphi(\mathbf{x}) \equiv 1$ .

**Beispiel 3.2:**

(*Auftrieb eines schwimmenden Körpers*) Ein physikalischer Körper, der den Raumbereich  $B \subset \mathbb{R}^3$  ausfüllt, schwimme in einer Flüssigkeit mit dem spezifischen Gewicht  $\rho$ . Dabei befindet sich der Teil  $B^*$  von  $B$  unter der Flüssigkeitsoberfläche, der Rest darüber, (s. Fig. 3.10). ( $B$  und  $B^*$

werden als Gaußsche Bereiche angesehen.) Der Druck der Flüssigkeit wird beschrieben durch die skalare Funktion

$$p(\mathbf{x}) = \begin{cases} p_0 & \text{für } z \geq h, \\ p_0 + \rho \cdot (h - z) & \text{für } z \leq h, \end{cases} \quad \text{mit } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

wobei  $p_0$  der (Luft-)druck über der Oberfläche ist und  $h$  die Höhe der Oberfläche auf der senkrechten  $z$ -Achse, (s. Fig. 3.10). Der *Auftrieb*  $A$  des Körpers ist die durch den Druck erzeugte Kraft

$$A = - \iint_{\partial B} p(\mathbf{x}) \, d\sigma,$$

wie die Physik lehrt. (Das Minuszeichen rührt daher, dass der Druck der nach außen gerichteten Flächennormalen entgegenwirkt.) Es folgt nach (3.31):

$$A = - \iint_{\partial B} p(\mathbf{x}) \, d\sigma = - \iiint_B \operatorname{grad} p(\mathbf{x}) \, d\tau = - \iiint_{B^*} \operatorname{grad} p(\mathbf{x}) \, d\tau.$$

Die letzte Gleichung gilt, da  $\operatorname{grad} p(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  für  $z \geq h$  ist. Setzt man den Ausdruck für  $p(\mathbf{x})$  ein, so folgt mit  $[0, 0, 1]^T =: \mathbf{k}$

$$A = \iiint_{B^*} \rho \mathbf{k} \, d\tau = \rho \mathbf{k} \iiint_{B^*} d\tau = \rho \mathbf{k} V(B^*),$$

wobei  $V(B^*)$  das Volumen von  $B^*$  ist. Damit ist  $m(B^*) := \rho V(B^*)$  das Gewicht der von  $B^*$  verdrängten Flüssigkeit, und es folgt das *Archimedische Auftriebsgesetz*

$$A = m(B^*) \mathbf{k},$$

d.h.:

Die nach oben gerichtete Auftriebskraft eines Körpers ist betragsmäßig gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit.

## Übungen

### Übung 3.4\*

Wie tief taucht eine kugelförmige Boje mit dem Radius  $r > 0$  ins Wasser? Dabei sei  $\rho$  das spezifische Gewicht des Wassers und  $V (= \frac{4}{3}\pi r^3)$  das Volumen der Kugel,  $G > 0$  das Gewicht der Kugel und  $\frac{G}{V} < \rho$ .

### Übung 3.5:

Verifiziere (3.31) für die Einheitskugel  $B$  und  $\varphi(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2$ .

## 3.2 Der Stokessche Integralsatz

Der Stokessche Satz lässt sich gut anhand strömender Flüssigkeiten oder Gase erläutern. Er lautet, umgangssprachlich ausgedrückt:

Die Umströmung einer Fläche (Zirkulation genannt) resultiert aus den Wirbeln in den Punkten der Fläche.

Er wird im Folgenden physikalisch erläutert und mathematisch exakt gefasst.

### 3.2.1 Einfache Flächenstücke

Die Flächenstücke, mit denen wir im Folgenden arbeiten, sollen *stückweise glatt berandet* sein und zunächst auch *einfach zusammenhängend*. Dies ist so erklärt:

#### Definition 3.3:

Ein Flächenstück  $F$  heißt *stückweise glatt berandet*, wenn es durch eine Parameterdarstellung  $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  beschrieben werden kann mit folgenden Eigenschaften:

- (a)  $D$  ist ein Gebiet<sup>21</sup> im  $\mathbb{R}^2$ , das von endlich vielen geschlossenen Jordankurven berandet ist, die stückweise glatt und »positiv orientiert« sind (d.h.  $D$  liegt »links« von den Kurven, vgl. Abschn. 3.1.5).
- (b)  $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist eineindeutig, und es gilt  $\text{Rang } f' = 2$  auf ganz  $\bar{D}$ .
- (c) Der Rand  $\partial F := f(\partial D)$  des Flächenstückes besteht somit aus endlich vielen geschlossenen Jordankurven, die entsprechend den Urbildkurven auf  $\partial D$  orientiert sind.

Flächenintegrale über  $F$  und Kurvenintegrale über  $\partial F$  beziehen sich im Folgenden stets auf die beschriebene Parameterdarstellung und Orientierung.

- (d)  $F$  heißt zusätzlich *einfach zusammenhängend*, wenn dies für  $D$  gilt. Das bedeutet, dass  $D$ , wie auch  $F$ , nur von einer geschlossenen Jordankurve berandet ist.
- (e) Ein Flächenstück nennen wir kurz *einfach*, wenn es *stückweise glatt berandet* und *einfach zusammenhängend* ist.

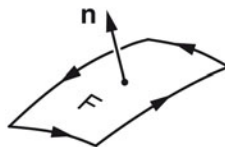


Fig. 3.11: Einfaches Flächenstück

<sup>21</sup> D.h. offen und zusammenhängend.

### 3.2.2 Zirkulation, Wirbelstärke, Rotation

Am Beispiel strömender Flüssigkeiten (oder Gase) werden im Folgenden Begriffe, Zusammenhänge und schließlich der Stokessche Satz entwickelt.<sup>22</sup>

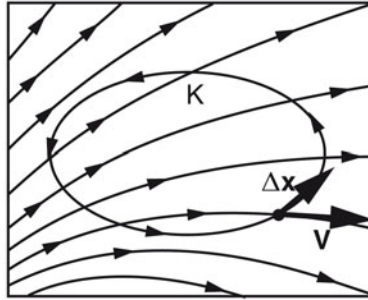


Fig. 3.12: Zur Zirkulation

Es sei  $V : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  das Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit in der offenen Menge  $M \subset \mathbb{R}^3$ .  $V$  sei stetig differenzierbar.

#### Zirkulation

In  $M$  betrachten wir eine geschlossene orientierte Jordankurve  $K$ , die wir als stückweise glatt voraussetzen. Das Kurvenintegral

$$Z = \oint_K \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \quad (3.32)$$

nennt man die *Zirkulation* von  $V$  längs der Kurve  $K$  (oder »bzgl.  $K$ «). Dies wird durch approximierende Riemannsche Summen

$$\sum_i \mathbf{V}(\mathbf{x}_i) \cdot \Delta \mathbf{x}_i \quad (3.33)$$

motiviert. Jeder Summand  $\mathbf{V}(\mathbf{x}_i) \cdot \Delta \mathbf{x}_i$  ist eine Geschwindigkeitskomponente in der Durchlaufungsrichtung der Kurve. Die Summierung ergibt ein Maß dafür, wie stark die Kurve umströmt wird, d.h. wie stark die Flüssigkeit längs der Kurve »zirkuliert«.

<sup>22</sup> Der Leser, der hauptsächlich an mathematischer Systematik und Beweisökonomie interessiert ist (ohne physikalische Motivation) kann gleich mit Satz 3.7 im Abschnitt 3.2.4 fortfahren.

**Wirbelstärke**

In unserer Strömung mit dem Geschwindigkeitsfeld  $V : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  betrachten wir ein *einfaches* Flächenstück  $F^{23}$  und berechnen die Zirkulation entlang der Randkurve  $\partial F$ :

$$Z = \oint_{\partial F} V(x) \cdot dx . \quad (3.34)$$

Wir dividieren nun  $Z$  durch den *Flächeninhalt*  $\sigma(F)$  des Flächenstückes und erhalten die *mittlere Wirbelstärke* von  $V$  bzgl.  $F$ :

$$\frac{1}{\sigma(F)} \oint_{\partial F} V(x) \cdot dx .$$

Um zur Wirbelstärke in einem Punkt  $x_0 \in F$  zu gelangen, liegt es nun nahe,  $F$  »auf den Punkt  $x_0$  zusammenzuziehen«. Dabei nehmen wir  $F$  als eben an, und die Flächennormale  $n$  als unveränderlich:

**Definition 3.4:**

Es sei  $V : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  ( $M \subset \mathbb{R}^3$  offen) stetig differenzierbar und  $x_0$  ein Punkt aus  $M$ . Der Grenzwert

$$W_n(x_0) := \lim_{\substack{|F| \rightarrow 0 \\ x_0 \in F}} \frac{1}{\sigma(F)} \oint_{\partial F} V(x) \cdot dx \quad (3.35)$$

heißt die *Wirbelstärke* von  $V$  in  $x_0$ . Dabei werden mit  $F$  ebene einfache Flächenstücke mit  $x_0 \in F$  bezeichnet, die alle die gleiche Normale  $n$  haben. <sup>25</sup>  $|F|$  symbolisiert den Durchmesser von  $F$  und  $\sigma(F)$  seinen Flächeninhalt.

Die *Existenz* des Grenzwertes ergibt sich leicht mit dem Greenschen Satz der Ebene. Wir können nämlich o.B.d.A. annehmen, dass  $F$  parallel zur  $x$ - $y$ -Ebene liegt,<sup>26</sup> parametrisiert durch  $x$  und  $y$  selbst, wobei die *Randkurve*  $\partial F$  das Flächenstück *positiv umläuft*. Mit den Komponentendarstellungen

$$\partial F : k(t) = \begin{bmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \\ z_0 \end{bmatrix}, \quad a \leq t \leq b \quad \text{und} \quad V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

23 d.h.  $F$  ist stückweise glatt berandet und einfach zusammenhängend (s. Abschn. 3.2.1).  
 24 Die Orientierung von  $\partial F$  wird von der positiven Umlaufung des Parameterbereiches induziert, s. Abschn. 3.2.1  
 25 Die Orientierung der Randkurve  $\partial F$  steht mit dem Normalenvektor  $n$  im Einklang; d.h.: Sieht man auf das Flächenstück  $F$  in Richtung der Normalen  $n$ , so wird  $F$  auf  $\partial F$  »im Uhrzeigersinn« umlaufen.  
 26 Andernfalls wird zunächst eine entsprechende Drehung des Koordinatensystems vorgenommen.

erhält man

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial F} \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} &= \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{k}) \cdot \dot{\mathbf{k}} dt^{27} = \int_a^b (V_1(\mathbf{k}) \cdot \dot{k}_1 + V_2(\mathbf{k}) \cdot \dot{k}_2) dt \\
 &= \oint_{\partial F} (V_1 dx + V_2 dy) \stackrel{\text{Green}}{=} \iint_F (V_{2,x} - V_{1,y})(\mathbf{x}) d(x, y) \text{ mit } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z_0 \end{bmatrix} \\
 &= \sigma(F) (V_{2,x} - V_{1,y})(\mathbf{x}^*).
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Die letzte Gleichung folgt nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung mit einem geeigneten  $\mathbf{x}^* \in F$ . Division durch  $\sigma(F)$  und Zusammenziehung von  $F$  auf einen Punkt  $\mathbf{x}_0$  liefert die *Wirbelstärke*  $W_n(\mathbf{x}_0)$  und damit gleichzeitig die Existenz des Grenzwertes (3.35):

$$W_n(\mathbf{x}_0) = (V_{2,x} - V_{1,y})(\mathbf{x}_0) \text{ mit } \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.37}$$

### Berechnung der Wirbelstärke

Wir betrachten den allgemeineren Fall, dass das ebene Flächenstück schräg im Raum liegt, und zwar so, wie es die Figur 3.13 zeigt.

$F$  wird dabei als kleines Dreieck  $[A, B, C]$  gewählt, das mit dem Punkt  $D$  einen Tetraeder mit den Seiten  $F, F_x, F_y, F_z$  bildet, wobei die Seiten  $F_x, F_y, F_z$  rechtwinklig zur  $x$ -,  $y$ -, bzw.  $z$ -Achse liegen. (Da die Existenz des Grenzwertes  $W_n(\mathbf{x}_0)$ , (3.35), gesichert ist, ist die Form von  $F$  beliebig wählbar.)

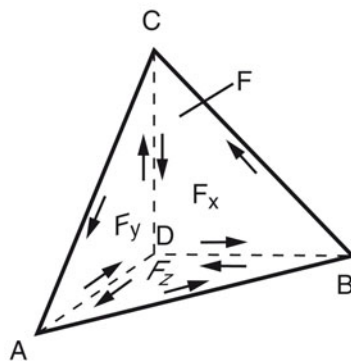


Fig. 3.13: Zur Wirbelstärke und Rotation

Der Normalenvektor  $\mathbf{n}$  von  $F$  habe drei positive Komponenten.  $F$  liege im Definitionsbereich

<sup>27</sup> Variablenangabe ( $t$ ) nach  $\mathbf{k}, \dot{\mathbf{k}}$  usw. weggelassen.

$M \subset \mathbb{R}^3$  ( $M$  offen) des stetig differenzierbaren Vektorfeldes  $\mathbf{V} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Mit den skizzierten Umlaufungen der Flächenstücke des Tetraeders (s. Fig. 3.13) folgt für die entsprechenden Kurvenintegrale

$$\oint_{\partial F} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x} = \oint_{\partial F_x} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x} + \oint_{\partial F_y} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x} + \oint_{\partial F_z} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x}, \tag{3.38}$$

da sich die Integralanteile über die Kanten  $[A, D]$ ,  $[B, D]$ ,  $[C, D]$  wegheben.  $F_z$  liegt parallel zur  $x$ - $y$ -Ebene, also folgt aus (3.36)

$$\oint_{\partial F_z} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x} = \sigma(F_z)r_3 \quad \text{mit} \quad r_3 = (V_{2,x} - V_{1,y})(\mathbf{x}_3), \quad (\mathbf{x}_3 \in F_z)$$

und analog

$$\begin{aligned} \oint_{\partial F_y} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x} &= \sigma(F_y)r_2 \quad \text{mit} \quad r_2 = (V_{1,z} - V_{3,x})(\mathbf{x}_2), \quad (\mathbf{x}_2 \in F_y), \\ \oint_{\partial F_x} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x} &= \sigma(F_x)r_1 \quad \text{mit} \quad r_1 = (V_{3,y} - V_{2,z})(\mathbf{x}_1), \quad (\mathbf{x}_1 \in F_x). \end{aligned} \tag{3.39}$$

Addition und anschließende Division durch  $\sigma(F)$  liefern nach (3.38):

$$\frac{1}{\sigma(F)} \oint_{\partial F} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x} = \frac{\sigma(F_x)}{\sigma(F)}r_1 + \frac{\sigma(F_y)}{\sigma(F)}r_2 + \frac{\sigma(F_z)}{\sigma(F)}r_3. \tag{3.40}$$

Es gilt aber

$$\begin{aligned} \sigma(F_x) &= \sigma(F) \cos \alpha, \\ \sigma(F_y) &= \sigma(F) \cos \beta, \\ \sigma(F_z) &= \sigma(F) \cos \gamma, \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix}, \tag{3.41}$$

wobei  $\alpha, \beta, \gamma$  die Winkel zwischen der Flächennormalen  $\mathbf{n}$  und den positiven Koordinatenachsen sind.

In (3.40) denkt man sich  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  für die Flächenquotienten  $\sigma(F_x)/\sigma(F)$  usw. eingesetzt. Dann zieht man  $F$  auf einen Punkt  $\mathbf{x}_0$  zusammen, wobei  $\mathbf{n}$  konstant bleibt. Die Größen  $r_1, r_2, r_3$  gehen dabei in die Komponenten des Vektors

$$\text{rot } \mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_{3,y} - V_{2,z} \\ V_{1,z} - V_{3,x} \\ V_{2,x} - V_{1,y} \end{bmatrix} \tag{28} \quad (= \text{Rotation von } \mathbf{V}) \tag{3.42}$$

28 Der Vektor  $\text{rot } \mathbf{V}$  ist uns schon in Abschn. 1.6.4 begegnet.

an der Stelle  $\mathbf{x}_0$  über, also die rechte Seite von (3.40) in das Produkt  $\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{V}(\mathbf{x}_0)$ . (Sind einige Komponenten von  $\mathbf{n}$  negativ bzw. Null, so gewinnt man das gleiche Ergebnis durch Umorientierung bzw. Grenzübergang.) Wir haben damit gezeigt:

**Satz 3.6:**

(*Berechnung der Wirbelstärke*) Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $\mathbf{V} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  ( $M \subset \mathbb{R}^3$  offen) ist die Wirbelstärke in  $\mathbf{x}_0 \in M$  gleich

$$W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{\substack{|F| \rightarrow 0 \\ \mathbf{x}_0 \in F}} \frac{1}{\sigma(F)} \oint_{\partial F} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{V}(\mathbf{x}_0) \quad (3.43)$$

( $\mathbf{n}$  ist hierbei der konstante Normalenvektor aller Flächenstücke  $F$ .)

Man nennt  $\text{rot } \mathbf{V}$  das *Wirbelfeld* zu  $\mathbf{V}$ .

**Bemerkung:**

- (a) Die Formel (3.43), angewandt auf Strömungen mit Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{V}$ , macht folgendes klar:  $\text{rot } \mathbf{V}(\mathbf{x}_0)$  gibt die Richtung der *Rotationsachse* für lokale Wirbel um  $\mathbf{x}_0$  an. Denn  $W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_0)$  ist am größten, wenn  $\mathbf{n}$  in Richtung von  $\text{rot } \mathbf{V}(\mathbf{x}_0)$  liegt, d.h. die lokalen Zirkulationen um  $\mathbf{x}_0$  verlaufen dann um kleine ebene Flächenstücke  $F$  herum, die rechtwinklig zu  $\text{rot } \mathbf{V}(\mathbf{x}_0)$  liegen.  $F$  ( $\perp \text{rot } \mathbf{V}(\mathbf{x}_0)$ ) kennzeichnet dann also die Hauptrotationsebene.
- (b) Die drei Formeln (3.39) und Figur 3.13 liefern eine physikalische Deutung der Komponenten von  $\text{rot } \mathbf{V}$ , und zwar durch Zirkulationen längs  $\partial F_z, \partial F_y, \partial F_x$ .

Die Rotationsbildung  $\text{rot } \mathbf{V}$  ist eine Art Differentiation von  $\mathbf{V}$ . Es gelten dafür die folgenden

**Rechenregeln für die Rotation**

Für stetig differenzierbare Vektorfelder  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  von  $M \subset \mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}^3$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a) } \text{rot}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{rot } \mathbf{A} + \text{rot } \mathbf{B} \\ \text{(b) } \text{rot}(\lambda \mathbf{A}) = \lambda \text{rot } \mathbf{A} \end{array} \right\} \text{Linearität}$$

(c)  $\text{rot } \mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Weitere Regeln über Produkte und Kombinationen mit  $\text{div}$ ,  $\text{grad}$  usw. sind im späteren Abschnitt 3.3.2 zusammengestellt.

**Übungen****Übung 3.6\***

Berechne  $\text{rot } \mathbf{V}$  von folgenden Vektorfeldern:

$$\text{(a) } \mathbf{V}(x, y, z) = \begin{bmatrix} xyz \\ y^2 + z^2 \\ e^{x+y+z} \end{bmatrix}, \quad \text{(b) } \mathbf{V}(x, y, z) = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$



**Übung 3.7:**

Beweise Formel (3.43) noch einmal auf anderem Wege, und zwar aus (3.37) durch einen Wechsel des Koordinatensystems:  $\mathbf{x} = Q\xi$ . Dabei ist  $Q = [q_1, q_2, q_3]$  eine Drehmatrix, sie erfüllt also  $Q^{-1} = Q^T$  und  $q_1 \times q_2 = q_3$ .

*Hinweis:*  $V(\mathbf{x})$  wird in  $\tilde{V}(\xi) = Q^{-1}V(Q\xi)$  transformiert. Hierzu ermittle man  $\tilde{V}_{2,\xi_1} - \tilde{V}_{1,\xi_2} = \dots$  (mit  $\xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3]^T$ ) und zeige, dass sich die rechte Seite von (3.43) ergibt. Gleichung (3.37) liefert dann Formel (3.43).

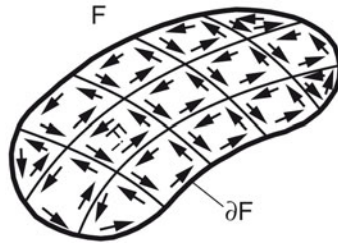


Fig. 3.14: Zum Stokesschen Integralsatz

**3.2.3 Idee des Stokesschen Integralsatzes**

In einer Strömung mit dem Geschwindigkeitsfeld  $V : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  ( $M \subset \mathbb{R}^3$  offen) denken wir uns ein einfaches Flächenstück  $F \subset M$  eingebettet. Es soll die Zirkulation um das Flächenstück aus den Wirbelstärken auf  $F$  berechnet werden. Dazu zerlegt man  $F$  in endlich viele »Maschen«  $F_i$  (s. Fig. 3.14), und erhält damit für die Zirkulation um  $F$ :

$$\oint_{\partial F} V(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \sum_i \oint_{\partial F_i} V(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}. \quad (3.44)$$

Denn in der rechten Summe heben sich alle Anteile an Kurvenintegralen weg, die »innen liegen«, d.h. nicht zu  $\partial F$  gehören (s. Fig. 3.14).

Sind die »Maschen« klein genug, so ist nach Satz 3.6 im vorigen Abschnitt jeder Summand der rechten Seite von (3.44) ungefähr gleich

$$\mathbf{n}_i \cdot \text{rot } V(\mathbf{x}_i) \sigma(F_i),$$

mit einem  $\mathbf{x}_i \in F_i$  und dem Normalenvektor  $\mathbf{n}_i$  in  $\mathbf{x}_i$ . Somit folgt

$$\oint_{\partial F} V(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \approx \sum_i \text{rot } V(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{n}_i \sigma(F_i). \quad (3.45)$$

Durch Verfeinerung der Maschenzerlegung geht die rechte Seite von (3.45) schließlich in das Integral  $\iint_F \text{rot } V(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}$  über. Man vermutet daher

$$\oint_{\partial F} \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \iint_F \operatorname{rot} \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} . \quad (3.46)$$

Dies ist der *Stokessche Integralsatz*.<sup>29</sup> Seine Richtigkeit wird im Folgenden exakt nachgewiesen.

Für Techniker und Naturwissenschaftler ist die vorstehende heuristische Herleitung und physikalische Deutung des Stokesschen Integralsatzes wichtiger als der nachfolgende exakte Beweis. Denn nach den obigen Überlegungen kann man den *Stokesschen Satz* anhand von Strömungen so interpretieren:

Die Zirkulation entlang einer Kurve, die ein Flächenstück umschließt, ist gleich dem Integral über alle Wirbelstärken auf dem Flächenstück.

Nun zur mathematischen Formulierung des Stokesschen Satzes und zu seinem Beweis!

### 3.2.4 Stokesscher Integralsatz im dreidimensionalen Raum

#### Satz 3.7:

(*Stokesscher Integralsatz im  $\mathbb{R}^3$* ) Es sei  $\mathbf{V} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  ( $M \subset \mathbb{R}^3$  offen) ein stetig differenzierbares Vektorfeld und  $F$  ein stückweise glatt berandetes Flächenstück<sup>30</sup> in  $M$ . Dann gilt:

$$\oint_{\partial F} \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \iint_F \operatorname{rot} \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (3.47)$$

#### Beweis:

Zunächst setzen wir  $F$  als einfach voraus, d.h.  $F$  wird von nur einer geschlossenen Jordankurve berandet.  $\mathbf{x} = \mathbf{f}(u, v)$ ,  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \bar{D}$ , sei die zugehörige Parameterdarstellung von  $F$ . Die Randkurve  $\partial D : \boldsymbol{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  wird durch

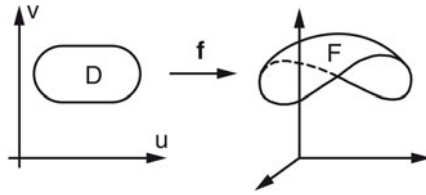
$$\mathbf{k}(t) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\gamma}(t)), \quad a \leq t \leq b,$$

in die Randkurve von  $\partial F$  transformiert.

Der Beweis beruht nun darauf, das Flächenstück  $F$  (nebst Integralen) auf den Parameterbereich  $\bar{D}$  zu transformieren, dort den ebenen Greenschen Satz anzuwenden und dann zurück zu

<sup>29</sup> Sir George Gabriel Stokes (1819–1903), irischer Mathematiker und Physiker.

<sup>30</sup> vgl. Abschn. 3.2.1.

Fig. 3.15: Zur Parameterdarstellung von  $F$ 

transformieren. Wir führen dies durch:

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial F} \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} &= \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{k}(t)) \cdot \dot{\mathbf{k}}(t) dt = \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{k}(t))^T \dot{\mathbf{k}}(t) dt \quad 31 \\
 &= \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{f} \circ \boldsymbol{\gamma}(t))^T \mathbf{f}'(\boldsymbol{\gamma}(t)) \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) dt \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Abkürzungen dabei:} \\ \mathbf{V} := \mathbf{V}(\mathbf{f} \circ \boldsymbol{\gamma}(t)), \\ \mathbf{f}_u := \mathbf{f}_u(\boldsymbol{\gamma}(t)), \quad \mathbf{f}_v := \mathbf{f}_v(\boldsymbol{\gamma}(t)) \\ \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \end{bmatrix} := \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t), \quad [\mathbf{f}_u, \mathbf{f}_v] = \mathbf{f}' \end{array} \right. \\
 &= \int_a^b \mathbf{V}^T[\mathbf{f}_u, \mathbf{f}_v] \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \end{bmatrix} dt \\
 &= \int_a^b (\mathbf{V}^T \mathbf{f}_u \dot{\gamma}_1 + \mathbf{V}^T \mathbf{f}_v \dot{\gamma}_2) dt = \int_a^b [(\mathbf{V}^T \mathbf{f}_u) du + (\mathbf{V}^T \mathbf{f}_v) dv] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{mit den Symbolen} \\ du = \dot{\gamma}_1 dt, \quad dv = \dot{\gamma}_2 dt \end{array} \right. \\
 &= \iint_{\bar{D}} [(\mathbf{V}^T \mathbf{f}_v)_u - (\mathbf{V}^T \mathbf{f}_u)_v] d(u, v) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{nach dem ebenen Greenschen} \\ \text{Satz; ab hier } \mathbf{V} := \mathbf{V}(\mathbf{f}(u, v)) \end{array} \right. \\
 &= \iint_{\bar{D}} [(\mathbf{V}' \mathbf{f}_u)^T \mathbf{f}_v + \mathbf{V}^T \mathbf{f}_{uv} - (\mathbf{V}' \mathbf{f}_v)^T \mathbf{f}_u - \mathbf{V}^T \mathbf{f}_{vu}] d(u, v) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{nach der Pro-} \\ \text{duktregel der} \\ \text{Differentiation} \end{array} \right. \\
 &= \iint_{\bar{D}} [\mathbf{f}_u^T \mathbf{V}'^T \mathbf{f}_v - \mathbf{f}_v^T \mathbf{V}'^T \mathbf{f}_u] d(u, v), \quad \begin{array}{l} \text{hier} \\ \text{einsetzen!} \end{array} \quad \mathbf{f}_u^T \mathbf{V}'^T \mathbf{f}_v = \mathbf{f}_v^T \mathbf{V}' \mathbf{f}_u \\
 &= \iint_{\bar{D}} [\mathbf{f}_v^T (\mathbf{V}' - \mathbf{V}'^T) \mathbf{f}_u] d(u, v) \quad \text{mit } (\mathbf{V}' - \mathbf{V}'^T) \mathbf{f}_u = \text{rot } \mathbf{V} \times \mathbf{f}_u \text{ folgt} \\
 &= \iint_{\bar{D}} \underbrace{\mathbf{f}_v \cdot (\text{rot } \mathbf{V} \times \mathbf{f}_u)}_{\text{Spatprodukt}} d(u, v) = \iint_{\bar{D}} \text{rot } \mathbf{V} \cdot (\mathbf{f}_u \times \mathbf{f}_v) d(u, v) \\
 &= \iint_F \text{rot } \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}.
 \end{aligned}$$

Damit gilt der Stokessche Satz für einfache Flächenstücke.

Da man stückweise glatt berandete Flächenstücke  $F$  in endlich viele einfache Flächenstücke  $F_i$  zerlegen kann (s. Fig. 3.16), folgt durch Summation der Stokesschen Integralformeln bzgl. der  $F_i$  die allgemeine Formel (3.47) des Stokesschen Integralsatzes.  $\square$

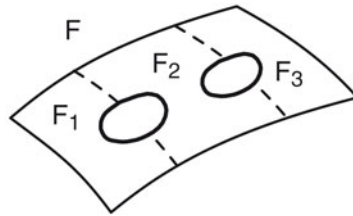


Fig. 3.16: Zerlegung in einfache Flächenstücke

**Bemerkung:**

- (a) Aus dem Stokesschen Satz folgt auf einfache Weise wiederum die Formel für die *Wirbelstärke* (Abschn. 3.2.2, (3.43)), denn es gilt:

$$\begin{aligned}
 W_n(\mathbf{x}_0) &= \lim_{|F| \rightarrow 0} \frac{\int_{\partial F} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x}}{\sigma(F)} = \lim_{|F| \rightarrow 0} \frac{\iint_F \operatorname{rot} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma}{\sigma(F)} \\
 &= \lim_{|F| \rightarrow 0} \operatorname{rot} \mathbf{V}(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{V}(\mathbf{x}_0), \quad (\mathbf{x}^* \in F),
 \end{aligned}
 \tag{3.48}$$

wobei  $\mathbf{x}_0 \in F$ ,  $F$  eben,  $\mathbf{n}$  gemeinsamer Normalenvektor aller  $F$ . (In der vorletzten Gleichung wurde der Mittelwertsatz der Integralrechnung verwendet.)

- (b) Der Leser, der nun an mathematischer Systematik und ökonomischer Beweisführung interessiert ist, kann auf die Abschnitte 3.2.2 und 3.2.3 verzichten. Er kommt mit dem vorliegenden Abschnitt (und Abschnitt 3.2.1) vollkommen aus, da Satz 3.7 nebst Beweis alles Wesentliche enthält.

Wir haben in den vorangehenden Abschnitten trotzdem den längeren Weg über physikalische Motivation beschritten, um Anwendungsbezüge und anschauliche Vorstellungen zu vermitteln.

**Folgerung 3.5:**

Es sei  $\mathbf{V} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  stetig differenzierbar ( $M \subset \mathbb{R}^3$  offen) und  $B$  ein stückweise glatt berandeter Bereich in  $M$ . Dann gilt

$$\iint_{\partial B} \operatorname{rot} \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0.$$

Man drückt dies kurz so aus: *Der Wirbelfluss durch eine geschlossene Fläche ist Null.*

31 Denn es gilt  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b}$  für alle  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ .

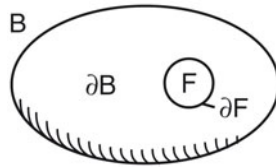


Fig. 3.17: Zu Folgerung 3.5

**Beweis:**

Aus  $\partial B$  schneide man ein kleines, einfaches Flächenstück  $F$  heraus (s. Fig. 3.17). Für die verbleibende Fläche  $\partial B/F$  ist nach dem Stokesschen Satz

$$\iint_{\partial B/F} \operatorname{rot} \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint_{\partial F} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x}.$$

Zieht man  $F$  auf einen Punkt zusammen, so hat man Folgerung 3.5. □

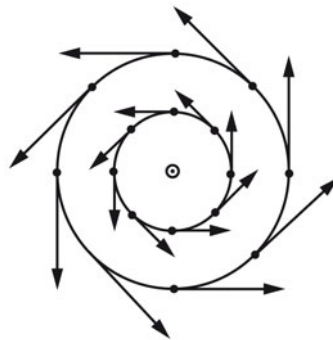


Fig. 3.18: Feld konstanter Wirbelstärke

**Beispiel 3.3:**

(Konstantes Wirbelfeld) Das Vektorfeld

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{w} \times \mathbf{x}, \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3)$$

kann in einer Ebene  $E$  senkrecht zu  $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$  wie in Figur 3.18 skizziert werden. Es folgt  $\operatorname{rot} \mathbf{V} = \mathbf{w}$  (konstantes Wirbelfeld). Für jedes einfache Flächenstück  $F$  in der Ebene  $E$  gilt nach dem Stokesschen Satz

$$\int_{\partial F} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x} = \iint_F \mathbf{w} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{w} \cdot \iint_F d\boldsymbol{\sigma} = |\mathbf{w}| \sigma(F).$$

Die Wirbelstärke  $W_n(\mathbf{x}_0)$  mit  $\mathbf{n} = \mathbf{w}/|\mathbf{w}|$  ist also konstant gleich  $|\mathbf{w}|$ .

### Übung 3.8\*

Verifiziere den Stokesschen Integralsatz für  $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = [x + y, -x^2zy, z + xy]^T$  und die »obere Hemisphäre«  $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| = 1, z \geq 0\}$ .

### 3.2.5 Zirkulation und Stokesscher Satz in der Ebene

<sup>32</sup> Für ein ebenes Vektorfeld  $\mathbf{V} : G \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $G \subset \mathbb{R}^2$ ) mit  $\mathbf{V} = [V_1, V_2]^T$  wird die *Zirkulation*  $Z$  entlang einer stückweise glatten, geschlossenen Jordankurve  $K : \mathbf{x} = \boldsymbol{\gamma}(t) \subset G$  ( $a \leq t \leq b$ ) analog zum  $\mathbb{R}^3$  definiert:

$$\text{Zirkulation: } Z = \oint_K \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \oint_K (V_1 dx + V_2 dy) := \int_a^b \mathbf{V}(\boldsymbol{\gamma}(t)) \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) dt. \quad (3.49)$$

Umläuft  $K$  dabei ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $D \subset \mathbb{R}^2$  im positiven Sinne (d.h.  $K = \partial D$ , und  $D$  liegt stets »links« von  $K$  bei der Durchlaufung), so folgt aus dem Stokesschen Satz im  $\mathbb{R}^3$  (durch Nullsetzen der dritten Koordinaten) der *Stokessche Satz in der Ebene*.

$$\oint_K (V_1 dx + V_2 dy) := \iint_D (V_{2,x} - V_{1,y}) d(x, y). \quad (3.50)$$

Dies stimmt aber mit dem *Greenschen Satz* (in der Ebene) überein (s. Abschn. 3.1.5 (3.28)), und nach Umbenennung der Koordinaten mit dem *Gaußschen Integralsatz* im  $\mathbb{R}^2$ . Das heißt:

In der Ebene sind die Integralsätze von Gauß, Green und Stokes identisch.

### Komplexe Schreibweise

Man kann den  $\mathbb{R}^2$  mit der komplexen Ebene  $\mathbb{C}$  identifizieren und Vektorfelder durch komplexwertige stetige Funktionen beschreiben:  $w = f(z)$ ,  $z \in G \subset \mathbb{C}$ . Auch Kurven lassen sich komplex darstellen:  $K : z = g(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ . Das komplexe Kurvenintegral über  $K$  wird dann durch

$$I = \oint_K f(z) \cdot dz := \int_a^b \underbrace{f(g(t))}_z \dot{g}(t) dt \quad (g \text{ glatt})$$

<sup>32</sup> Kann beim ersten Lesen überschlagen werden.

beschrieben, was mit den Zerlegungen  $f = f_1 + i f_2, g = g_1 + i g_2$  in Real- und Imaginärteile folgendes ergibt

$$\begin{aligned}
 I &= \int_a^b (f_1 \dot{g}_1 - f_2 \dot{g}_2) dt + i \int_a^b (f_1 \dot{g}_2 + f_2 \dot{g}_1) dt \quad 33 \\
 &:= \underbrace{\int_K (f_1 dx - f_2 dy)}_a + i \underbrace{\int_K (f_1 dy + f_2 dx)}_b . \tag{3.51}
 \end{aligned}$$

Der *Realteil*  $a$  ist also zu deuten als *Fluss* des Vektorfeldes  $F = [f_2, f_1]^T$  durch  $K$  (s. Abschn. 3.1.5, Fußnote zu (3.27)), und der *Imaginärteil* in (3.51) als *Zirkulation* von  $F$  längs  $K$  ( $K$  als geschlossen vorausgesetzt).

**Beispiel 3.4:**

Es sei  $f(z) = \frac{1}{z}$  ( $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ ) und  $K : z = r e^{it}$  ( $0 \leq t \leq \pi; r > 0$ ) eine Kreislinie um 0, »positiv« umlaufen. Damit errechnet man das Kurvenintegral

$$\oint_K f(z) dz = \oint_K \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r e^{it}} r e^{it} \cdot i dt = 2\pi i .$$

Die Funktion  $h(z) = \frac{T}{2\pi} \cdot \frac{1}{z}$  ergibt also  $\oint_K h(z) dz = iT$ .

Mit  $z = x + iy$  ist aber  $1/z = \bar{z}/|z|^2 = (x - iy)/(x^2 + y^2)$ . Somit folgt: Das Vektorfeld

$$F(x, y) = \frac{T}{2\pi(x^2 + y^2)} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \text{ auf } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

hat längs positiv umlaufender Kreise um  $0$  die Zirkulation  $T$ . Man erkennt, dass die Berechnung einer Zirkulation über die komplexe Schreibweise sehr bequem sein kann (vgl. Beisp. 1.22 in Abschn. 1.6.6). Man sagt übrigens,  $F$  hat bei  $0$  einen »punktförmigen Wirbel«.

**3.3 Weitere Differential- und Integralformeln im  $\mathbb{R}^3$**

In diesem und im folgenden Abschnitt pflücken wir die Früchte der vorangegangenen Arbeit wie reife Trauben. Die Flexibilität, Kraft und Anwendbarkeit der Vektoranalysis wird deutlich.

---

33 Hier Kurzschreibweise:  $f_k$  statt  $f_k(g(t))$ ,  $\dot{g}_k$  statt  $\dot{g}_k(t)$ .

### 3.3.1 Nabla-Operator

Der symbolische Vektor

$$\nabla := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.52)$$

wird *Nabla-Operator*<sup>34</sup> genannt. Man rechnet mit ihm formal wie mit jedem Vektor des  $\mathbb{R}^3$ , wobei z.B.  $\frac{\partial}{\partial x}\varphi$  als formales Produkt aus  $\frac{\partial}{\partial x}$  und  $\varphi$  aufgefasst wird, usw. Der Leser prüft damit für stetig differenzierbare Vektorfelder  $\mathbf{V}$  und Skalarfelder  $\varphi$  sofort folgendes nach:

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi &= \nabla \varphi, \\ \text{div } \mathbf{V} &= \nabla \cdot \mathbf{V}, \\ \text{rot } \mathbf{V} &= \nabla \times \mathbf{V}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

$\nabla$  ist ein *linearer Operator*, d.h. es gilt für alle stetig differenzierbaren Vektorfelder  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  und Skalarfelder  $\varphi$ ,  $\psi$  auf ihren gemeinsamen Definitionsbereichen

$$\left. \begin{aligned} \nabla(\lambda\varphi + \mu\psi) &= \lambda\nabla\varphi + \mu\nabla\psi, \\ \nabla \cdot (\lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B}) &= \lambda\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\nabla \cdot \mathbf{B}, \\ \nabla \times (\lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B}) &= \lambda\nabla \times \mathbf{A} + \mu\nabla \times \mathbf{B}, \end{aligned} \right\} \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \quad (3.54)$$

Ist  $\varphi$  zweimal stetig differenzierbar, so erhält man

$$(\nabla \cdot \nabla)\varphi =: \Delta\varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}, \quad \text{kurz } \nabla^2 = \Delta \quad (3.55)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

heißt dabei der *Laplace-Operator*.<sup>35</sup> Er kann auch auf Vektorfelder  $\mathbf{A} = [A_1, A_2, A_3]^T$  angewandt werden:

$$\Delta\mathbf{A} = [\Delta A_1, \Delta A_2, \Delta A_3]^T.$$

### 3.3.2 Formeln über Zusammensetzungen mit grad, div und rot

Im Folgenden bezeichnen  $\mathbf{A}, \mathbf{B} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  Vektorfelder und  $\varphi, \psi, \eta$  Skalarfelder auf der offenen Menge  $M \subset \mathbb{R}^3$ . Sie seien alle so oft stetig differenzierbar, wie es die folgenden Formeln fordern. Es gilt damit:

<sup>34</sup> Der Ausdruck »Nabla« stammt von einem hebräischen Saiteninstrument, das etwa die Form  $\nabla$  hat.

<sup>35</sup> Nach Pierre-Simon (Marquis de) Laplace (1749–1827), französischer Mathematiker und Astronom.



**Doppelte Anwendung der Differentialoperatoren grad, div, rot:**

- (a)  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$  *(Jedes Wirbelfeld ist quellenfrei!)*  
 (b)  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \mathbf{0}$  *(Jedes Gradientenfeld ist wirbelfrei!)*  
 (c)  $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi$  (kurz:  $\operatorname{div} \operatorname{grad} = \Delta$ )  
 (d)  $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} = \Delta \mathbf{A} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}$  oder umgestellt:  
 (d<sub>1</sub>)  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}.$

**Anwendungen der Differentialoperatoren auf Produkte:**

- (e)  $\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \varphi$   
 (e<sub>1</sub>)  $\operatorname{grad}(\varphi\psi\eta) = \varphi\psi \operatorname{grad} \eta + \psi\eta \operatorname{grad} \varphi + \eta\varphi \operatorname{grad} \psi$   
 (f)  $\operatorname{div}(\varphi \mathbf{A}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} \varphi$   
 (g)  $\operatorname{rot}(\varphi \mathbf{A}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{A}$   
 (h)  $\operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} + \mathbf{A}' \mathbf{B} + \mathbf{B}' \mathbf{A}$   
 (i)  $\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}$   
 (j)  $\operatorname{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A}' \mathbf{B} - \mathbf{B}' \mathbf{A}.$

Gelegentlich schreibt man in (h) und (j) auch:  $\mathbf{A}' \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A}$ .

**Die gleichen Formeln in  $\nabla$ -Schreibweise:**

- (a')  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$   
 (b')  $\nabla \times (\nabla \varphi) = \mathbf{0}$   
 (c')  $(\nabla \cdot \nabla) \varphi = \Delta \varphi$   
 (d')  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \Delta \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$   
 (e')  $\nabla(\varphi\psi) = \varphi \nabla \psi + \psi \nabla \varphi$   
 (f')  $\nabla \cdot (\varphi \mathbf{A}) = \varphi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \varphi$   
 (g')  $\nabla \times (\varphi \mathbf{A}) = \varphi \nabla \times \mathbf{A} + (\nabla \varphi) \times \mathbf{A}$   
 (h')  $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$   
 (i')  $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$   
 (j')  $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}.$

**Übung 3.9\***

Man rechne nach, dass die angegebenen Formeln (a) bis (j) richtig sind.

### 3.3.3 Gaußscher und Stokesscher Satz in div-, grad-, rot-, und Nabla-Form

Im Folgenden sind, wie bisher, das Vektorfeld  $V : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  und das Skalarfeld  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  stetig differenzierbar auf einer offenen Menge  $M \subset \mathbb{R}^3$ . Der Bereich  $B \subset M$  wie auch die Fläche  $F \subset M$  sind stückweise glatt berandet. Voilà! — Damit lassen sich Gaußscher und Stokesscher Satz in folgenden Varianten schreiben:

**Satz 3.8:**

(Gaußscher Integralsatz in div-, grad-, und rot-Form)

$$\iint_{\partial B} \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_B \operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{x}) d\tau, \quad (3.56)$$

$$\iint_{\partial B} \varphi(\mathbf{x}) d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_B \operatorname{grad} \varphi(\mathbf{x}) d\tau, \quad (3.57)$$

$$\iint_{\partial B} d\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{V}(\mathbf{x}) = \iiint_B \operatorname{rot} \mathbf{V}(\mathbf{x}) d\tau. \quad (3.58)$$

**Beweis:**

(3.56) ist der ursprüngliche Gaußsche Satz und (3.57) wurde schon in Abschnitt 3.1.6 hergeleitet.

In der dritten Gleichung bedeutet  $\iint_{\partial B} d\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{V}(\mathbf{x}) := \iint_{\partial B} \mathbf{n}(\mathbf{x}) \times \mathbf{V}(\mathbf{x}) d\sigma$ , mit der äußeren Normalen  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  in  $\mathbf{x} \in \partial B$ . Hier wird also die symbolische Gleichung  $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\sigma$  verwendet, wie bisher. Zum Beweis der *Rotationsform* (3.58) des Gaußschen Satzes wendet man (3.56) auf  $\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{a} \times \mathbf{V}$  mit beliebiger Konstanten  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  an. Aus Formel (i) im vorigen Abschnitt ergibt sich

$$\operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{V}) = -\mathbf{a} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{V} \stackrel{(3.56)}{\implies} \iint_{\partial B} (\mathbf{a} \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = -\mathbf{a} \cdot \iiint_B \operatorname{rot} \mathbf{V} d\tau.$$

Die linke Seite der letzten Gleichung kann aber als  $\mathbf{a} \cdot \iint_{\partial B} (\mathbf{V} \times \mathbf{n}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}$  geschrieben werden, also folgt

$$\mathbf{a} \cdot \iint_{\partial B} (\mathbf{n} \times \mathbf{V}) d\sigma = \mathbf{a} \cdot \iiint_B \operatorname{rot} \mathbf{V} d\tau. \quad (3.59)$$

Da diese Gleichung für *jedes*  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  gilt (insbesondere für  $\mathbf{a} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ) kann man  $\mathbf{a}$  »herauskürzen«, und es bleibt Gleichung (3.58) übrig.  $\square$

Satz 3.8 liefert die folgende *Merkregel*:

*Raumintegrale über div . . . , grad . . . oder rot . . . lassen sich in Flächenintegrale umwandeln.*

**Satz 3.9:**(Stokesscher Integralsatz in rot-, grad-, und  $\nabla$ -Form)

$$\int_{\partial F} \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \iint_F \operatorname{rot} \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}, \quad (3.60)$$

$$\int_{\partial F} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \iint_F d\boldsymbol{\sigma} \times \operatorname{grad} \varphi(\mathbf{x}), \quad (3.61)$$

$$\int_{\partial F} d\mathbf{x} \times \mathbf{V}(\mathbf{x}) = \iint_F (d\boldsymbol{\sigma} \times \nabla) \times \mathbf{V}(\mathbf{x}). \quad (3.62)$$

Dabei wird in naheliegender Weise mit

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\sigma \quad \text{und} \quad d\mathbf{x} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) ds$$

gearbeitet ( $\mathbf{n}$  Flächennormale,  $\mathbf{T}$  Tangenteneinheitsvektor an  $\partial F$ ).<sup>36</sup>

**Beweis:**

(3.60) ist der eigentliche Stokessche Satz. (3.61) ergibt sich leicht durch Anwendung der Formel (3.60) auf  $\mathbf{V} = \mathbf{a}\varphi$  (unter Ausnutzung der Regel  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$  für das Spatprodukt).

Zum Nachweis von (3.62) wird der Stokessche Satz (3.60) auf  $\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{a} \times \mathbf{V}$  angewendet ( $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ ). Es gilt also

$$\int_{\partial F} (\mathbf{a} \times \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{x} = \iint_F \operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{V}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}. \quad (3.63)$$

Links ergibt sich:

$$\int_{\partial F} (\mathbf{a} \times \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{a} \cdot \int_{\partial F} \mathbf{V} \times d\mathbf{x} = -\mathbf{a} \cdot \int_{\partial F} d\mathbf{x} \times \mathbf{V}.$$

Die rechte Seite von (3.63) wandelt man um in

$$\begin{aligned} \iint_F [\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{V})] \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \iint_F \mathbf{n} \cdot [\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{V})] d\sigma = \iint_F (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{V}) d\sigma \\ &= - \iint_F (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{a}) d\sigma = - \iint_F [(\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{V}] \cdot \mathbf{a} d\sigma \\ &= -\mathbf{a} \cdot \iint_F (d\boldsymbol{\sigma} \times \nabla) \times \mathbf{V}. \end{aligned}$$

Einsetzen in (3.63) nebst  $\mathbf{a} = \mathbf{i}, \mathbf{j}$  und  $\mathbf{k}$  liefert (3.62). □

<sup>36</sup> Zur Orientierung: In Randpunkten der Fläche weist  $\mathbf{n} \times \mathbf{T}$  lokal in Richtung der Fläche (längs der Tangentialebene).

Beide Sätze, d.h. alle sechs Formeln lassen sich einheitlich zusammenfassen zu folgender *Merkregel*:<sup>37</sup>

$$\text{Gaußscher Satz: } \int_{\partial B} d\boldsymbol{\sigma} \star = \int_B d\tau \nabla \star, \quad (3.64)$$

$$\text{Stokesscher Satz: } \int_{\partial F} d\mathbf{x} \star = \int_F (d\boldsymbol{\sigma} \times \nabla) \star. \quad (3.65)$$

Dabei darf  $\star$  in jeder Gleichung wahlweise durch folgende Ausdrücke ersetzt werden:

$$\cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}), \quad \varphi(\mathbf{x}), \quad \times \mathbf{V}(\mathbf{x}) \quad (3.66)$$

### 3.3.4 Eine Anwendung auf partielle Differentialgleichungen

Die Sätze von Gauß und Stokes erweisen sich bei der Herleitung von partiellen Differentialgleichungen als unentbehrliches Hilfsmittel. Daneben sind aber grundlegende Kenntnisse über physikalische Zusammenhänge nötig<sup>38</sup>.

Um einen Einblick in die Vorgehensweise bereits im Kontext dieses Bandes zu vermitteln, zeigen wir dies anhand der Maxwellschen Gleichungen. Diese Gleichungen stehen im Zentrum der Elektrodynamik. Sie lauten

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \sigma \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, t \in [0, \infty) \quad (3.67)$$

mit den positiven Konstanten  $\varepsilon$  (Dielektrizität),  $\mu$  (Permeabilität) und  $\sigma$  (elektrische Leitfähigkeit) und stellen ein lineares *System* von partiellen Differentialgleichungen 1-ter Ordnung für die elektrische Feldstärke  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  und die magnetische Feldstärke  $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$  dar.

Wir leiten die erste der beiden Gleichungen aus (3.67) her.

Ein Zusammenhang zwischen dem elektrischen und dem magnetischen Feld wird durch das Induktionsgesetz hergestellt. Sei  $F$  ein glatt berandetes Flächenstück (siehe Abschn. 3.2.1) mit der positiv orientierten Randkurve  $C$ . Das Induktionsgesetz besagt dann, dass die Zirkulation des elektrischen Feldes längs  $C$  bis auf das Vorzeichen mit der Ableitung des Induktionsflusses durch  $F$  übereinstimmt:

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = -\frac{d}{dt} \int_F \mu \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) d\boldsymbol{\sigma}. \quad (3.68)$$

Wir setzen  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  als stetig differenzierbar voraus. Dann lässt sich das rechte Integral in (3.68)

<sup>37</sup> Nach [29], S. 226 und S. 238.

<sup>38</sup> Diesem Anliegen wenden wir uns ausführlich im Band Funktionalanalysis und Partielle Differentialgleichungen [13] zu.

zu

$$- \int_F \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) d\sigma$$

umformen (warum?). Auf die linke Seite der Gleichung (3.68) wenden wir nun den *Satz von Stokes* in  $\nabla$ -Schreibweise an. Es ergibt sich

$$\int_F \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) d\sigma.$$

Damit folgt aus (3.68) die Gleichung

$$\int_F \left\{ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \right\} d\sigma = 0 \quad (3.69)$$

für *jedes* glatt berandete Flächenstück  $F$ , das im Definitionsbereich von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  liegt, so dass der Integrand von (3.69) überall verschwindet. Begründung: Angenommen es gelte  $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \neq 0$  für ein  $(\mathbf{x}, t)$  aus dem Definitionsbereich von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$ . Folglich ist der Integrand aufgrund der stetigen Differenzierbarkeit der Funktionen  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  bei festem  $t$  in einer hinreichend kleinen Kugel  $K_\varepsilon(\mathbf{x})$  um den Punkt  $\mathbf{x}$  ungleich Null. Da (3.69) auch für  $F = K_\varepsilon(\mathbf{x})$  gilt und in  $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$  aufgrund der Stetigkeit kein Vorzeichenwechsel in  $K_\varepsilon(\mathbf{x})$  stattfinden kann, führt unsere Annahme zu einem Widerspruch. Damit erhalten wir die erste Maxwellsche Gleichung

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t).$$

Die zweite Gleichung lässt sich ganz entsprechend herleiten.

### 3.3.5 Partielle Integration

Aus der eindimensionalen Analysis ist die Formel

$$\int_a^b u'(x) v(x) dx = \left[ u(x) v(x) \right]_a^b - \int_a^b u(x) v'(x) dx$$

der *partiellen Integration* bekannt. Man gewinnt sie aus  $(uv)' = u'v + uv'$  durch Integration.

Im  $\mathbb{R}^3$  besitzt die Formel mehrere Gegenstücke. Man erhält sie, indem man die Differentialoperatoren *div*, *grad* und *rot* auf Produkte von Feldern anwendet und dann den *Gaußschen Satz* in einer seiner Varianten des vorigen Abschnittes (Satz 3.8) heranzieht. Wir führen dies im Folgenden aus, wobei die Produktformeln (e), (f), (g), (i) aus Abschnitt 3.3.2 verwendet werden. Die in den Formeln vorkommenden Felder sind dabei auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich stetig differenzierbar (wen wundert's?).

(i) Aus  $\text{grad}(\varphi\psi) = \varphi \text{ grad } \psi + \psi \text{ grad } \varphi$  folgt mit (3.57)

$$\iint_{\partial B} \varphi\psi \cdot d\sigma = \iiint_B (\varphi \text{ grad } \psi + \psi \text{ grad } \varphi) d\tau. \quad (3.70)$$

(ii) Aus  $\text{div}(\varphi\mathbf{A}) = \varphi \text{ div } \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \text{grad } \varphi$  ergibt sich

$$\iint_{\partial B} \varphi\mathbf{A} \cdot d\sigma = \iiint_B (\varphi \text{ div } \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \text{grad } \varphi) d\tau. \quad (3.71)$$

(iii) Die Formel  $\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{V}$  liefert

$$\iint_{\partial B} (\mathbf{A} \times \mathbf{V}) \cdot d\sigma = \iiint_B (\mathbf{V} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{V}) d\tau. \quad (3.72)$$

(iv) Mit  $\text{rot}(\varphi\mathbf{A}) = \varphi \text{ rot } \mathbf{A} + \text{grad } \varphi \times \mathbf{A}$  folgt über (3.58)

$$\iint_{\partial B} d\sigma \times \varphi\mathbf{A} = \iiint_B (\varphi \text{ rot } \mathbf{A} + \text{grad } \varphi \times \mathbf{A}) d\tau. \quad (3.73)$$

### Übung 3.10\*

Leite aus den Formeln (h) und (j) in Abschnitt 3.3.2 auf entsprechende Weise wie oben Integralformeln her.

### 3.3.6 Die beiden Greenschen Integralformeln

Aus der Formel für  $\text{div}(\varphi\mathbf{A})$  (Abschn. 3.3.2, (f)) gewinnt man im Falle  $\mathbf{A} = \text{grad } \psi$  die Gleichung

$$\text{div}(\varphi \text{ grad } \psi) = \varphi \Delta \psi + \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \psi. \quad (3.74)$$

Hierbei wurde  $\Delta \psi = \text{div grad } \psi$  gesetzt. Wendet man nun den Gaußschen Integralsatz an, so folgt

$$\iint_{\partial B} \varphi \text{ grad } \psi \cdot d\sigma = \iiint_B (\varphi \Delta \psi + \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \psi) d\tau. \quad (3.75)$$

$B$  ist dabei ein stückweise glatt berandeter Bereich im  $\mathbb{R}^3$ , wie üblich. Auf der linken Seite von (3.75) ersetzen wir  $d\sigma$  durch  $\mathbf{n}d\sigma$  (mit dem nach außen weisenden Normalenvektor  $\mathbf{n}$  auf  $\partial B$ ). Erinnern wir uns noch an die *Richtungsableitung*

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \text{grad } \psi, \quad (\text{s. Burg/Haf/Wille (Analysis) [14]}), \quad (3.76)$$

so erhält Gleichung (3.75) folgende Form:

**Erste Greensche Integralformel** <sup>39</sup>

$$\iint_{\partial B} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} d\sigma = \iiint_B (\varphi \Delta \psi + \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \psi) d\tau \tag{3.77}$$

Den Integranden rechts kann man natürlich auch durch die linke Seite von (3.74),  $\text{div}(\varphi \text{ grad } \psi)$  ersetzen.

Vertauscht man  $\varphi$  mit  $\psi$  in (3.77) und subtrahiert die so gewonnene Formel von (3.77), so gelangt man zu folgendem:

**Zweite Greensche Integralformel**

$$\iint_{\partial B} \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma = \iiint_B (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) d\tau . \tag{3.78}$$

$\varphi$  und  $\psi$  sind in den Formeln dieses Abschnittes stets so oft stetig differenzierbar vorausgesetzt, wie es die Formeln verlangen.

Im Spezialfall  $\psi(\mathbf{x}) \equiv 1$  gewinnen wir aus (3.78) noch die interessante Formel

$$\iint_{\partial B} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} d\sigma = \iiint_B \Delta \varphi d\tau . \tag{3.79}$$

Sie zeigt, dass Raumintegrale über Laplacesche Differentialausdrücke  $\Delta \varphi$  in Flächenintegrale verwandelt werden können.

**Bemerkung:** Die Greenschen Formeln sind bedeutungsvoll für Eindeutigkeitsbeweise bei gewissen partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Im nächsten Abschnitt 3.4 werden wichtige Beispiele dazu gegeben.

**3.3.7 Krummlinige orthogonale Koordinaten**

**Orthogonale Koordinatentransformationen**

Eine *Koordinatentransformation* im  $\mathbb{R}^3$  wird folgendermaßen beschrieben:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}(\mathbf{u}) , \quad \mathbf{u} \in D \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{40} , \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} . \tag{3.80}$$

$\mathbf{T} : D \rightarrow G$  bildet dabei den Bereich  $D \subset \mathbb{R}^3$  auf den Bereich  $G \subset \mathbb{R}^3$  ab.  $\mathbf{T}$  sei so oft stetig differenzierbar, wie es die folgenden Formeln jeweils verlangen. Überdies sei  $\mathbf{T}$  umkehrbar eindeutig und es gelte überall in  $D$ :

$$\det \mathbf{T}' > 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{T}_{u_i} \cdot \mathbf{T}_{u_k} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k . \tag{41}$$

<sup>39</sup> George Green (1793 – 1841), englischer Mathematiker und Physiker.

<sup>40</sup> Wir schreiben wahlweise  $x_1, x_2, x_3$  oder  $x, y, z$  für die Koordinaten.  $x_1, x_2, x_3$  werden gerne bei theoretischen Erörterungen benutzt,  $x, y, z$  dagegen in Beispielen.

Letzteres heißt, dass die Spalten von  $T'$  paarweise rechtwinklig zueinander stehen. Aus diesem Grunde spricht man von einer (krummlinigen) *orthogonalen Koordinatentransformation*  $T$ .  $x_1, x_2, x_3$  sind dabei die »alten« (kartesischen) Koordinaten und  $u_1, u_2, u_3$  die »neuen« (krummlinigen) Koordinaten.

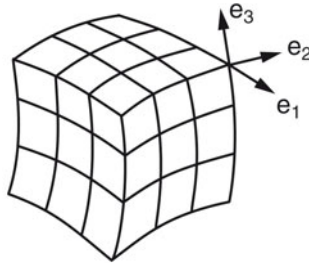


Fig. 3.19: Krummlinige orthogonale Koordinaten (mit Koordinatenlinien)

Die Kurven, die durch

$$\left. \begin{aligned} x &= T(t, u_2, u_3) \\ x &= T(u_1, t, u_3) \\ x &= T(u_1, u_2, t) \end{aligned} \right\}, \quad t \text{ variabel}, \tag{3.81}$$

beschrieben werden, heißen *Koordinatenlinien*. Betrachten wir z.B. die erste Gleichung  $x = T(t, u_2, u_3)$ , so werden dabei  $u_2, u_3$  beliebig, aber fest gewählt, während  $t$  variiert (wobei  $[t, u_2, u_3]^T \in D$  ist). Analoges gilt für die zweite und dritte Gleichung in (3.81). Es handelt sich also um drei Scharen von Kurven.

Durch jeden Punkt  $x = T(u_1, u_2, u_3)$  verlaufen genau drei Kurven, aus jeder der drei Scharen in (3.81) eine. Sie kreuzen sich in  $x$  paarweise rechtwinklig, d.h. ihre Tangentenvektoren  $T_{u_1}, T_{u_2}, T_{u_3}$  stehen dort paarweise senkrecht aufeinander. Damit bilden die Vektoren

$$e_1 = \frac{T_{u_1}}{g_1}, \quad e_2 = \frac{T_{u_2}}{g_2}, \quad e_3 = \frac{T_{u_3}}{g_3}, \quad \text{mit } g_i := |T_{u_i}|, \quad (i = 1, 2, 3) \tag{3.82}$$

für jedes  $u \in D$  ein *orthogonales Rechtssystem* (d.h.  $e_i \cdot e_k = \delta_{ik}$ ,  $\det(e_1, e_2, e_3) = 1$ ). Man nennt  $(e_1, e_2, e_3)$  auch ein (Rechts-)Dreibein längs der Koordinatenlinien.

Die wichtigsten Beispiele für krummlinige orthogonale Koordinaten sind Zylinder- und Kugelkoordinaten.

**Beispiel 3.5:**

(Zylinderkoordinaten) (s. Fig. 3.20(a)):

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi, \quad (r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad z \in \mathbb{R}). \\ z &= z \end{aligned} \tag{3.83}$$

---

41  $T_{u_i} = \partial T / \partial u_i$  usw.



Für  $r = \text{konstant} > 0$  beschreiben die Gleichungen jeweils einen Zylinder, dessen Achse die  $z$ -Achse ist. Daher der Name (s. Fig. 3.20(b))!

Wir schreiben im Folgenden  $e_r, e_\varphi, e_z$  statt  $e_1, e_2, e_3$ . Damit folgt im Falle  $r > 0$ :

$$\begin{aligned} g_1 &= 1 \\ g_2 &= r, \quad e_r = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_\varphi = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \\ g_3 &= 1 \end{aligned} \tag{3.84}$$

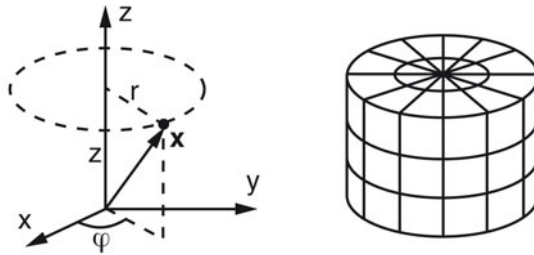


Fig. 3.20: (a) Zylinderkoordinaten  $r, \varphi, z$ ; (b) Koordinatenlinien dazu

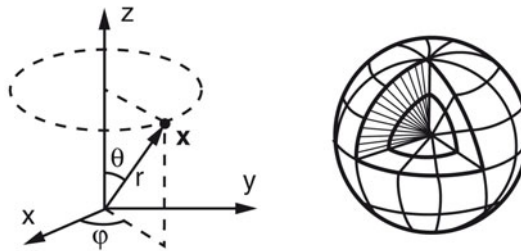


Fig. 3.21: (a) Kugelkoordinaten  $r, \Theta, \varphi$ ; (b) Koordinatenlinien dazu

**Beispiel 3.6:**

(Kugelkoordinaten) (auch »sphärische« oder »räumliche Polarkoordinaten« genannt), siehe Figur 3.21(a).

$$\begin{aligned} x &= r \sin \Theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \Theta \sin \varphi \quad (r \geq 0, 0 \leq \Theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi). \\ z &= r \cos \Theta \end{aligned} \tag{3.85}$$

Für  $r = \text{konstant} > 0$  wird jeweils eine Kugeloberfläche um  $\mathbf{0}$  beschrieben. Die Durchstoßpunkte der  $z$ -Achse können dabei als »Nord-« und »Südpol« angesehen werden.  $\varphi$  beschreibt die »geographische Länge« und  $\Theta$  die »Breite« ( $\Theta = 0$ : Nordpol,  $\Theta = \pi/2$ : Äquator,  $\Theta = \pi$ : Südpol).

Die Koordinatenlinien sind also die Längen- und Breitenkreise, sowie die Geraden durch  $\mathbf{0}$ , siehe Figur 3.21(b).

Es folgt im Falle  $r > 0, 0 < \Theta < \pi$ , wobei wir  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\Theta, \mathbf{e}_\varphi$  statt  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  schreiben:

$$\begin{aligned} g_1 &= 1 \\ g_2 &= r \\ g_3 &= r \sin \Theta \end{aligned}, \quad \mathbf{e}_r = \begin{bmatrix} \sin \Theta \cos \varphi \\ \sin \Theta \sin \varphi \\ \cos \Theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_\Theta = \begin{bmatrix} \cos \Theta \cos \varphi \\ \cos \Theta \sin \varphi \\ -\sin \Theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.86)$$

Weitere technisch und physikalisch nützliche *orthogonale Koordinaten* sind folgende (vgl. Burg/Haf/Wille (Analysis) [14]): *Parabolische Zylinderkoordinaten, rotationsparabolische Koordinaten, elliptische Zylinderkoordinaten, und Toruskoordinaten* ( $x_1 = (a - R \cos \Theta) \cos \varphi, x_2 = (a - R \cos \Theta) \sin \varphi, x_3 = R \sin \Theta$ , wobei  $0 \leq R < a$ ).

### Felder in krummlinigen orthogonalen Koordinaten

$V : G \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei ein Vektorfeld und  $\psi : G \rightarrow \mathbb{R}$  ein Skalarfeld. Beide seien genügend oft stetig differenzierbar im Zusammenhang mit folgenden Formeln. Die Funktionsgleichungen  $\mathbf{y} = V(\mathbf{x})$  und  $\lambda = \psi(\mathbf{x})$  werden durch  $\mathbf{x} = \mathbf{T}(\mathbf{u})$  transformiert in

$$\mathbf{y} = V(\mathbf{T}(\mathbf{u})) =: \tilde{V}(\mathbf{u}), \quad \lambda = \psi(\mathbf{T}(\mathbf{u})) = \tilde{\psi}(\mathbf{u}), \quad (3.87)$$

kurz

$$V(\mathbf{x}) = \tilde{V}(\mathbf{u}), \quad \psi(\mathbf{x}) = \tilde{\psi}(\mathbf{u}) \quad \text{mit } \mathbf{x} \in \mathbf{T}(\mathbf{u}). \quad (3.88)$$

$V(\mathbf{x})$  und  $\tilde{V}(\mathbf{u})$  bezeichnen also den gleichen Punkt in  $G$ .

Für beliebig gewähltes  $\mathbf{u} \in D$  sei  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  das zugehörige Dreibein (s. (3.82)). Damit lässt sich  $\tilde{V}(\mathbf{u})$  als Linearkombination der  $\mathbf{e}_i$  schreiben:

$$\tilde{V} = V^1 \mathbf{e}_1 + V^2 \mathbf{e}_2 + V^3 \mathbf{e}_3 \quad \text{42 mit } V^i = \tilde{V} \cdot \mathbf{e}_i. \quad (3.89)$$

Der Übersicht wegen wird hier die Variable  $\mathbf{u}$  weggelassen. Die rechte Gleichung folgt durch Multiplikation der linken Gleichung mit  $\mathbf{e}_i$ . Die  $V^i$  sind von  $\mathbf{u} \in D$  abhängige reelle Funktionen. Wir nennen  $V^1, V^2, V^3$  die *Koordinaten von V entlang der Koordinatenlinien* (bzgl.  $\mathbf{T}$ ).

Da sowohl die  $V^i$  wie auch die  $\mathbf{e}_i$  von  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]^T$  abhängen, erhält man die partielle Ableitung von  $\tilde{V}$  nach  $u_i$  durch die Produktdifferentiation:

$$\tilde{V} = \sum_{i=1}^3 V^i \mathbf{e}_i \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u_k} \tilde{V} = \sum_{i=1}^3 \left( V_{u_k}^i \mathbf{e}_i + V^i \mathbf{e}_{i,u_k} \right). \quad (3.90)$$

42 In  $V^i$  ist  $i$  ein (oberer) Index. Es ist hier also keine Potenzierung gemeint.

**Beispiel 3.7:**

Für  $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = [z^2, 0, 0]^T$  errechne man die Koordinaten entlang der Kugelkoordinaten-Linien. Wir bezeichnen sie mit  $V^r, V^\Theta, V^\varphi$  statt  $V^1, V^2, V^3$ . Es gilt mit (3.85), (3.86):

$$V^r = \tilde{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{e}_r = z^2 \sin \Theta \cos \varphi = r^2 \cos^2 \Theta \sin \Theta \cos \varphi$$

$$V^\Theta = \tilde{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{e}_\Theta = z^2 \cos \Theta \cos \varphi = r^2 \cos^3 \Theta \cos \varphi$$

$$V^\varphi = \tilde{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{e}_\varphi = -z^2 \sin \varphi = -r^2 \cos^2 \Theta \sin \varphi.$$

**Übung 3.11\***

- Für das Vektorfeld  $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = [y, -z, 1]^T$  berechne man die Koordinaten  $V^r, V^\varphi, V^z$  entlang der Zylinderkoordinaten-Linien (vgl. Beisp. 3.5).
- Berechne die partiellen Ableitungen nach  $r, \varphi$  und  $z$  für die Vektoren  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$  bei Zylinderkoordinaten (s. (3.84)), also  $\partial \mathbf{e}_r / \partial r, \partial \mathbf{e}_r / \partial \varphi$  usw.
- Entsprechend wie (b) für Kugelkoordinaten.

**3.3.8 Die Differentialoperatoren grad, div, rot,  $\Delta$  in krummlinigen orthogonalen Koordinaten**

Mit den Bezeichnungen des vorigen Abschnittes folgt

**Satz 3.10:**

Es gilt

$$(a) \quad \text{grad } \psi(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{e}_1}{g_1} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{g_2} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{g_3} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_3} \quad (3.91)$$

und damit symbolisch:

$$(b) \quad \nabla = \frac{\mathbf{e}_1}{g_1} \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{g_2} \frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{g_3} \frac{\partial}{\partial u_3}. \quad (3.92)$$

Ferner:

$$(c) \quad \text{div } \mathbf{V}(\mathbf{x}) = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (g_2 g_3 V^1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (g_3 g_1 V^2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (g_1 g_2 V^3) \right]. \quad (3.93)$$

$$(d) \quad \text{rot } \mathbf{V}(\mathbf{x}) = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \begin{vmatrix} g_1 \mathbf{e}_1 & g_2 \mathbf{e}_2 & g_3 \mathbf{e}_3 \\ \partial / \partial u_1 & \partial / \partial u_2 & \partial / \partial u_3 \\ g_1 V^1 & g_2 V^2 & g_3 V^3 \end{vmatrix}. \quad (3.94)$$

$$(e) \quad \Delta \psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_i} \left( \frac{g_1 g_2 g_3}{g_i^2} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_i} \right). \quad (3.95)$$

Auf der linken Seite beziehen sich alle Differentialoperatoren auf  $\mathbf{x}$ . Die rechten Seiten in (a), (c), (d), (e) hängen von  $\mathbf{u}$  ab. Setzt man links  $\mathbf{x} = \mathbf{T}(\mathbf{u})$  ein, so hängen auch die linken von  $\mathbf{u}$  ab.

**Beweis:**

Zu (a), (b): Zu zeigen ist  $\text{grad } \psi \cdot \mathbf{e}_i = \frac{1}{g_i} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_i}$ , wie das Durchmultiplizieren von (a) mit  $\mathbf{e}_i$  verdeutlicht. Mit

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}(\mathbf{u}), \quad \frac{\partial x_k}{\partial u_i} = T_{k,u_i}$$

ergibt sich dies so:

$$\text{grad } \psi \cdot \mathbf{e}_i = \text{grad } \psi \cdot \frac{\mathbf{T}_{u_i}}{g_i} = \frac{1}{g_i} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial u_i} = \frac{1}{g_i} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_i}. \tag{3.96}$$

Zu (c):<sup>45</sup> Gleichung (a), angewandt auf  $u_1 = \varphi(\mathbf{x}) =: (\mathbf{T}^{-1})_1(\mathbf{x})$  liefert zunächst

$$\nabla u_1 = \frac{\mathbf{e}_1}{g_1} \Rightarrow \mathbf{e}_1 = g_1 \nabla u_1, \quad \text{allgemein: } \mathbf{e}_i = g_i \nabla u_i.$$

Damit kann man die Formeln über Zusammensetzungen mit  $\nabla$  ausnutzen (s. Abschn. 3.3.2, (a') bis (j')). Zum Beweis von (c) hat man mit dieser Methode

$$\text{div } \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot \sum_{i=1}^3 V^i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 \nabla \cdot (V^i \mathbf{e}_i). \tag{46}$$

zu ermitteln. Zur Bearbeitung von  $\nabla \cdot (V^1 \mathbf{e}_1)$  setzt man dabei zunächst

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = g_2 g_3 \nabla u_2 \times \nabla u_3$$

ein. Es folgt mit (f'), Abschnitt 3.3.2:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (V^1 \mathbf{e}_1) &= \nabla \cdot (g_2 g_3 V^1 \nabla u_2 \times \nabla u_3) \\ &= g_2 g_3 V^1 \underbrace{\nabla \cdot (\nabla u_2 \times \nabla u_3)}_{=0} + \underbrace{(\nabla u_2 \times \nabla u_3)}_{\mathbf{e}_1 / (g_2 g_3)} \cdot \nabla (g_1 g_3 V^1). \end{aligned}$$

43  $\psi(\mathbf{x}) = \tilde{\psi}(\mathbf{u}), (\mathbf{x} = \mathbf{T}(\mathbf{u}))$ .

44  $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 V^i(\mathbf{u}) \mathbf{e}_i(\mathbf{u})$ . (In  $V^i$  ist  $i$  ein oberer Index.)

45 Die Divergenzformel (c) folgt auch als Spezialfall aus der »Kettenregel der Divergenz«, Abschn. 3.1.3.

46  $\nabla$  bezieht sich stets auf  $\mathbf{x}$ ! Man hat sich also in  $\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{V}}_1(\mathbf{u}) \mathbf{e}_i(\mathbf{u}))$  zunächst  $\mathbf{u} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{x})$  eingesetzt zu denken, worauf dann  $\nabla$  auf  $\mathbf{x}$  wirkt:  $\nabla = [\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3]^T$ .

Wir beachten: Nach Abschnitt 3.3.2 folgt:

$$\nabla \cdot (\nabla u_2 \times \nabla u_3) = \nabla u_3 \cdot \underbrace{(\nabla \times \nabla u_2)}_0 - \nabla u_2 \cdot \underbrace{(\nabla \times \nabla u_3)}_0 = 0.$$

also

$$\nabla(V^1 \mathbf{e}_1) = \frac{1}{g_2 g_3} \mathbf{e}_1 \cdot \nabla(g_2 g_3 V^1) = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \frac{\partial}{\partial u_1} (g_2 g_3 V^1).$$

letzteres nach (3.96). Entsprechendes folgt für  $\nabla \cdot (V^2 \mathbf{e}_2)$  und  $\nabla \cdot (V^3 \mathbf{e}_3)$ , woraus sich (c) ergibt.

Zu (d): Nach dem gleichen Prinzip wie oben wird  $\operatorname{rot} \mathbf{V}$  umgeformt:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{V} &= \nabla \times \mathbf{V} = \nabla \times \sum_{i=1}^3 V^i \mathbf{e}_i = \sum_i \nabla \times (V^i \mathbf{e}_i) = \sum_i \nabla \times (g_i V^i \nabla u_i) \\ &= \sum_i \left[ g_i V^i \nabla \times (\nabla u_i) - \nabla u_i \times \nabla (g_i V^i) \right] \quad (\text{nach (g'), Abschn. 3.3.2}) \\ &= \sum_i \nabla (g_i V^i) \times \nabla u_i = \sum_i \left[ \sum_k \frac{\mathbf{e}_k}{g_k} (g_i V^i)_{u_k} \right] \times \frac{\mathbf{e}_i}{g_i} \quad (\text{nach (a)}). \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren der rechten Seite liefert 6 Glieder (da  $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$ ). Es sind die gleichen 6 Glieder, die durch Auswerten der Determinante in Formel (d) entstehen (mit Sarrusscher Regel). Damit ist (d) bewiesen.

Zu (e): Es gilt

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla \cdot \left[ \sum_i \mathbf{e}_i \left( \frac{1}{g_i} \right) \left( \frac{\partial}{\partial u_i} \right) \right]$$

nach (b). Man wende nun die Divergenzformel (c) an, wobei  $V^i$  durch  $(1/g_i)(\partial/\partial u_i)$  ersetzt wird. Damit folgt (e).  $\square$

Wir wenden Satz 3.10 nun auf Zylinder- und Kugelkoordinaten an:

### Beispiel 3.8:

Für Zylinderkoordinaten  $r, \varphi, z$  mit dem zugehörigen Dreibein  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$  (s. (3.84)) gelten für die Felder  $\psi(\mathbf{x}) = \tilde{\psi}(r, \varphi, z)$  und  $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = V^r \mathbf{e}_r + V^\varphi \mathbf{e}_\varphi + V^z \mathbf{e}_z$  die folgenden Formeln:

$$\operatorname{grad} \psi(\mathbf{x}) = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (3.97)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{x}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V^r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V^z}{\partial z} \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \mathbf{V}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z \\ V^r & rV^\varphi & V^z \end{vmatrix} \\
&= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V^z}{\partial\varphi} - \frac{\partial V^\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left( \frac{\partial V^r}{\partial z} - \frac{\partial V^z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi \\
&\quad + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rV^\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial V^r}{\partial\varphi} \right) \mathbf{e}_z \tag{3.99}
\end{aligned}$$

$$\Delta\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial z^2}. \tag{3.100}$$

**Beispiel 3.9:**

Für Kugelkoordinaten  $r, \Theta, \varphi$  mit dem Dreibein  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\Theta, \mathbf{e}_\varphi)$  (s. (3.86)) erhält man für die Felder

$$\psi(\mathbf{x}) = \tilde{\psi}(r, \Theta, \varphi) \quad \text{und} \quad \mathbf{V}(\mathbf{x}) = V^r \mathbf{e}_r + V^\Theta \mathbf{e}_\Theta + V^\varphi \mathbf{e}_\varphi$$

folgendes:

$$\operatorname{grad} \psi(\mathbf{x}) = \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\Theta} \mathbf{e}_\Theta + \frac{1}{r \sin\Theta} \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\varphi} \mathbf{e}_\varphi \tag{3.101}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{x}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V^r) + \frac{1}{r \sin\Theta} \left[ \frac{\partial}{\partial\Theta} (\sin\Theta V^\Theta) + \frac{\partial V^\varphi}{\partial\varphi} \right] \tag{3.102}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \mathbf{V}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{r^2 \sin\Theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\Theta & r \sin\Theta \mathbf{e}_\varphi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\Theta & \partial/\partial\varphi \\ V^r & rV^\Theta & r \sin\Theta V^\varphi \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{r \sin\Theta} \left( \frac{\partial(\sin\Theta V^\varphi)}{\partial\Theta} - \frac{\partial V^\Theta}{\partial\varphi} \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin\Theta} \frac{\partial V^r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rV^\varphi)}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\Theta \\
&\quad + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rV^\Theta)}{\partial r} - \frac{\partial V^r}{\partial\Theta} \right) \mathbf{e}_\varphi \tag{3.103}
\end{aligned}$$

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\Theta} \frac{\partial}{\partial\Theta} \left( \sin\Theta \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\Theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\Theta} \frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial\varphi^2}. \tag{3.104}$$

**Übungen****Übung 3.12\***

Man wende die Operatoren  $\operatorname{grad}$  und  $\Delta$  in Zylinder- und Kugelkoordinaten auf folgende Skalarfelder an:

$$\text{(a) } \psi(\mathbf{x}) = xyz, \quad \text{(b) } \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \ (\mathbf{a} \neq \mathbf{0}), \quad \text{(c) } \alpha(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}| \ (\neq 0).$$

**Übung 3.13\***

Bestimme  $\text{grad div } \mathbf{e}_r$  und  $\text{rot } \mathbf{e}_\theta$  in Kugelkoordinaten ( $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$  zugehöriges Dreibein).

**Übung 3.14:**

Wende  $\text{rot}$  und  $\text{div}$  in Zylinder- und Kugelkoordinaten auf folgende Vektorfelder an:

$$(a) \mathbf{V}(\mathbf{x}) = [yz, x^2, 1]^T, \quad (b) \mathbf{W}(\mathbf{x}) = \mathbf{w} \times \mathbf{x} \quad (\mathbf{w} \neq \mathbf{0}). \quad (3.105)$$

*Hinweis:* Schreibe die Felder zunächst in die jeweiligen Koordinaten um!

**Übung 3.15\***

Berechne  $\text{grad}$ ,  $\text{div}$ ,  $\text{rot}$  und  $\Delta$  in folgenden Koordinaten:

$$(a) \begin{array}{l} \text{elliptische} \\ \text{Zylinderkoordinaten:} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = c \cosh u \cos v \\ y = c \sinh u \sin v \\ z = z \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} c = \text{konst.} > 0 \\ u, z \in \mathbb{R} \\ v \in [0, 2\pi) \end{array}$$

$$(b) \begin{array}{l} \text{rotationsparabolische} \\ \text{Koordinaten:} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = uv \cos \varphi \\ y = uv \sin \varphi \\ z = (u^2 - v^2)/2 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} u, v \in \mathbb{R} \\ \varphi \in [0, 2\pi) \end{array}.$$

**3.4 Wirbelfreiheit, Quellfreiheit, Potentiale**

Nun kommt »Butter bei die Fische«.

**3.4.1 Wirbelfreiheit:  $\text{rot } \mathbf{V} = \mathbf{0}$ , skalare Potentiale**

Schon in Abschnitt 1.6.4, Folgerung 1.3, wurde folgendes gezeigt:

Ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $\mathbf{V} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$  auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^3$  besitzt genau dann ein (skalares) Potential  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn  $\text{rot } \mathbf{V} = \mathbf{0}$  ist.

In Kurzform

$$\text{rot } \mathbf{V} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \exists \varphi : \mathbf{V} = \text{grad } \varphi \quad 47 \quad (3.106)$$

Gilt  $\mathbf{V} = \text{grad } \varphi$ , so heißt  $\mathbf{V}$  ein *Potentialfeld* (auch *Gradientenfeld* oder *konservatives Feld* genannt). Man sagt ferner,  $\mathbf{V}$  ist *wirbelfrei*, wenn  $\text{rot } \mathbf{V} = \mathbf{0}$  gilt.

Damit lautet die obige Aussage kurz (bezogen auf einfach zusammenhängende Gebiete<sup>48</sup>):

<sup>47</sup>  $\exists$  = es existiert ein.

<sup>48</sup> Darunter fallen Quader, Kugeln, ja, alle konvexen Gebiete, wobei diese sogar »blasenartige« Löcher enthalten können.

Ein wirbelfreies Vektorfeld ist ein Potentialfeld, und umgekehrt.

Die Potentiale  $\varphi$  von  $V$  ergeben sich explizit aus

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{x_0}^{\mathbf{x}} V(\boldsymbol{\xi}) \cdot d\boldsymbol{\xi} + c \quad (c \in \mathbb{R} \text{ konstant}), \quad (3.107)$$

wobei  $x_0$  beliebig, aber fest in  $G$  gewählt ist, und die Integration auf einer beliebigen stückweise glatten Kurve von  $x_0$  bis  $\mathbf{x}$  ausgeführt wird. Am besten nimmt man Strecken oder Streckenzüge (Abschn. 1.6.3).

**Bemerkung:** Die obige Aussage (3.106) folgt auch aus dem Stokesschen Integralsatz. Wir skizzieren den Beweis kurz: Es sei  $\text{rot } V = \mathbf{0}$ . Wir betrachten nun einen beliebigen geschlossenen Streckenzug  $S$  in  $G$ . Man kann ihn in  $G$  auf einen Punkt zusammenziehen (da  $G$  einfach zusammenhängt), und zwar o.B.d.A. auf einer triangulierten Fläche, wie es die Figur 3.22 zeigt.

(Man trianguliere das Urbilddreieck  $R$  der Zusammenziehung  $h : R \rightarrow G$  fein genug und übertrage die Triangulierung in den Bildbereich von  $h$ . Es entsteht  $F$ .)  $S$  ist also gleich dem Rand dieser Fläche  $F$ , und mit dem Stokesschen Satz gilt

$$\oint_S V \cdot d\mathbf{x} = \iint_F \text{rot } V \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0. \quad (3.108)$$

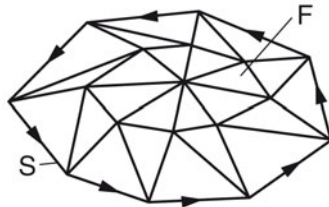


Fig. 3.22: Die Fläche  $F$  »überspannt« die Kurve  $S$

Die Kurvenintegrale von  $V$  verschwinden also über jedem geschlossenen Streckenzug in  $G$ , durch Grenzübergang damit über beliebige geschlossene, stückweise glatte Wege, woraus die Wegunabhängigkeit bzgl.  $V$  in  $G$  folgt und nach dem Kurvenhauptsatz (Abschn. 1.6.3) die Existenz eines Potentials  $\varphi$  von  $V$ .

Die umgekehrte Schlussrichtung ( $V = \text{grad } \varphi \Rightarrow \text{rot } V = \mathbf{0}$ ) ist wegen  $\text{rot grad } \varphi = \mathbf{0}$  trivial.

### Übung 3.16\*

Berechne das Potential  $\varphi$  von  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  auf  $\mathbb{R}^3$ .



### 3.4.2 Laplace-Gleichung, harmonische Funktionen

In Physik und Technik treten oft Vektorfelder  $V : G \rightarrow \mathbb{R}^3$  auf, die *wirbelfrei und quellfrei* sind, also

$$\operatorname{rot} V = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \operatorname{div} V = 0 \quad (3.109)$$

auf  $G$  erfüllen. Wir wollen  $G$  als einfach zusammenhängendes Gebiet annehmen. Dann existiert ein *Potential*  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $V = \operatorname{grad} \varphi$ . Aus  $\operatorname{div} V = 0$  folgt damit  $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0$ , d.h.

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{auf } G. \quad (3.110)$$

Diese Differentialgleichung ist die *Laplace-Gleichung* (oder *Potentialgleichung*). Ein zweimal stetig differenzierbares Skalarfeld  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ , welches  $\Delta \varphi = 0$  auf  $G \subset \mathbb{R}^3$  erfüllt, heißt eine *harmonische Funktion*<sup>49</sup> auf  $G$ .

**Bemerkung:** Wirbel- und quellfreie Vektorfelder kommen als Geschwindigkeitsfelder im Rahmen der Hydrodynamik häufig vor, ja, auch in der Aerodynamik. Zur Berechnung der Strömungen um verschiedene Körper (Zylinder, Rohre, Tragflächen usw.) sind daher harmonische Funktionen unentbehrlich. (Auf zweidimensionale Strömungen wird in Burg/Haf/Wille (Funktionentheorie) [10] eingegangen.)

Für Eindeutigkeitsbeweise verwenden wir folgenden Satz (s. Burg/Haf/Wille (Partielle Dgln.) [13]):

#### Satz 3.11:

(*Maximumprinzip*) Eine nichtkonstante harmonische Funktion auf  $G \subset \mathbb{R}^3$  nimmt in keinem inneren Punkt von  $G$  ihr Maximum oder Minimum an.

#### Dirichletsches Randwertproblem

Gesucht ist eine Funktion  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf dem beschränkten Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^3$  zweimal stetig differenzierbar ist und stetig auf ganz  $\bar{G}$ , und die folgendes erfüllt:

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{in } G, \quad \varphi(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \quad \text{auf } \partial G \quad (3.111)$$

$g : \partial G \rightarrow \mathbb{R}$  ist dabei eine gegebene stetige Funktion. Die rechte Bedingung in (3.111) heißt *Dirichletsche*<sup>50</sup> *Randbedingung*.

#### Folgerung 3.6:

Das Dirichletsche Randwertproblem hat höchstens eine Lösung  $\varphi$ .

#### Beweis:

Sind  $\varphi, \psi$  zwei Lösungen von (3.111), so folgt für die Differenz  $\Phi = \varphi - \psi$  ebenfalls  $\Delta \Phi = 0$ , aber  $\Phi(\mathbf{x}) = 0$  für alle  $\mathbf{x} \in \partial G$ . Da  $\Phi$  nach Satz 3.11 ihr Maximum und ihr Minimum auf dem Rande  $\partial G$  annimmt, folgt  $\Phi(\mathbf{x}) = 0$  auf ganz  $G$ , also  $\varphi = \psi$ .  $\square$

<sup>49</sup> auch *Potentialfunktion* genannt.

<sup>50</sup> Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), deutscher Mathematiker.

Der Beweis der Lösungsexistenz und die Lösungsberechnung für (3.111) ist schwierig. Wir verweisen daher auf Burg/Haf/Wille (Partielle Dgln.) [13].

Auf Kugeln lassen sich aber die Lösungen des *Dirichlet-Problems* formelmäßig angeben. Es gilt für die Kugel  $K_r \subset \mathbb{R}^3$  mit Radius  $r > 0$  um  $\mathbf{0}$

**Satz 3.12:**

(Poissonsche<sup>51</sup>Integralformel)

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = 0 \text{ in } K_r \\ \varphi|_{\partial K_r} = g \text{ (} g \text{ stetig)} \end{aligned} \iff \varphi(\mathbf{x}) = \frac{r^2 - \mathbf{x}^2}{4\pi r} \iint_{\partial K_r} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d\sigma_{\mathbf{y}} \quad (3.112)$$

Die Formel lässt sich durch Rechnung verifizieren. (Diese ist allerdings kompliziert. Wir verweisen daher auf den entsprechenden Beweis in Burg/Haf/Wille (Partielle Dgln.) [13])

In der Strömungsmechanik treten neben dem Dirichlet-Problem häufig folgende Aufgaben auf:

*Neumannsches<sup>53</sup>Randwertproblem*

$$\Delta\varphi = 0 \text{ auf } G, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \text{ auf } \partial G \quad (3.113)$$

*Gemischtes Randwertproblem*

$$\Delta\varphi = 0 \text{ auf } G, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{x}) + h(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \text{ auf } \partial G \text{ (} h \geq 0 \text{ und } h(\mathbf{x}) > 0 \text{ für einige } \mathbf{x} \in \partial G) \quad (3.114)$$

$\varphi$  wird dabei zweimal stetig differenzierbar auf  $\bar{G}$  vorausgesetzt.  $g$  und  $h$  sind gegebene stetige Funktionen,  $\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}$  bezeichnet die Ableitung nach der äußeren Normalen auf  $\partial G \neq \emptyset$ .  $G$  sei offen und  $\bar{G}$  ein stückweise glatt berandeter Bereich.

**Folgerung 3.7:**

(Zur Eindeutigkeit)

- (a) Je zwei Lösungen der Neumannschen Randwertaufgabe unterscheiden sich nur um eine additive Konstante.
- (b) Das gemischte Randwertproblem hat höchstens eine Lösung.

<sup>51</sup> Siméon-Denis Poisson (1781 – 1840), französischer Physiker und Mathematiker.

<sup>52</sup>  $d\sigma_{\mathbf{y}}$  bedeutet, dass sich die Integration auf  $\mathbf{y}$  bezieht.

<sup>53</sup> Carl Gottfried Neumann (1832 – 1925), deutscher Mathematiker

**Beweis:**

Zu (b) Für die Differenz  $\Phi = \varphi - \psi$  zweier beliebiger Lösungen von (3.114) gilt  $\Delta\Phi = 0$  in  $G$  und  $\partial\Phi/\partial\mathbf{n} + h\Phi = 0$  auf  $\partial G$ . Mit der ersten Greenschen Formel (Abschn. 3.3.6), in der beide Funktionen gleich  $\Phi$  gesetzt werden, folgt dann

$$\iint_G (\text{grad } \Phi)^2 d\tau = \iint_{\partial G} \Phi \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}} d\sigma = - \iint_{\partial G} h\Phi^2 d\sigma \leq 0 \quad (3.115)$$

$$\Rightarrow \text{grad } \Phi = 0 \Rightarrow \Phi = \varphi - \psi = \text{konstant.}$$

Damit auf  $\partial G$ :  $\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}} = 0$ , wegen  $\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}} + h\Phi = 0$  also  $\Phi = 0$ , d.h.  $\varphi = \psi$ .

Zu (a) Die Schlusskette (3.115) wird mit  $h = 0$  durchgeführt. Es folgt wie dort  $\varphi - \psi = \text{konstant}$  für zwei Lösungen  $\varphi, \psi$  von (3.113).  $\square$

Die *Lösungsberechnung* der Probleme (Dirichlet, Neumann, gemischt) wird heutzutage mit der *Methode der finiten Elemente* oder mit *Differenzenverfahren* auf Computern erfolgreich durchgeführt. Analytische Behandlungen (z.B. mit »Greenscher Funktion«) sind in spezielleren Fällen auch möglich (s. Burg/Haf/Wille (Partielle Dgln.) [13]).

**Übung 3.17\***

Löse  $\Delta\varphi = 0$  mit dem Produktansatz  $\varphi(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \neq 0$  (Lösungen evtl. komplex.)

**3.4.3 Poissongleichung**

Die *Poissongleichung* in

$$\text{skalärer Form: } \Delta\varphi = f \quad \text{oder Vektorform: } \Delta\mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (3.116)$$

spielt in der Gasdynamik, in der Theorie zäher Flüssigkeiten und in der Elektrodynamik (Wellenausbreitung) eine wichtige Rolle. Wir untersuchen in diesem Zusammenhang das folgende

*Randwertproblem*

$$\Delta\varphi = f \quad \text{auf } G, \quad \varphi(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \quad \text{auf } \partial G \neq \emptyset \quad (3.117)$$

( $G \subset \mathbb{R}^3$  Gebiet;  $f, g$  gegebene stetige Funktionen;  $\varphi: \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$  gesucht, wobei  $\varphi$  zweimal stetig differenzierbar in  $G$  und stetig auf  $\bar{G}$  sein soll.)

Wie in Folgerung 3.6 im vorigen Abschnitt beweist man, dass das Randwertproblem höchstens eine Lösung hat.

Ferner kann man das Problem (3.117) in die folgenden zwei Randwertprobleme aufspalten:

$$\Delta\varphi_1 = f \quad \text{auf } G, \quad \varphi_{1/\partial G} = 0, \quad (3.118)$$

$$\Delta\varphi_2 = 0 \quad \text{auf } G, \quad \varphi_{2/\partial G} = g. \quad (3.119)$$

Sind  $\varphi_1, \varphi_2$  Lösungen dieser Probleme, so löst  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$  das ursprüngliche Randwertproblem (3.117).

Das zweite Problem, (3.119), ist das Dirichletsche Randwertproblem, welches im vorigen Abschnitt behandelt wurde. Wir konzentrieren uns daher auf (3.118), die »Poisson-Gleichung nebst homogenen Randbedingungen«.

Für numerische Lösungsmethoden mit »finiten Elementen«, Differenzenverfahren, Reihen, Splines usw. wird auf die Literatur verwiesen (z.B. [66]). Analytische Methoden findet der Leser in Burg/Haf/Wille (Partielle Dgln.) [13]. Hier sollen nur die Spezialfälle  $G = K_r$  (Kugel) und  $G = \mathbb{R}^3$  (Ganzraumproblem) notiert werden.

**Satz 3.13:**

Das Randwertproblem (3.118) hat für  $G = K_r$  (Kugel) die eindeutig bestimmte Lösung

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int \int \int_{K_r} \left[ \frac{f(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{r f(\mathbf{y})}{|\mathbf{y}| |\mathbf{x} - r^2 \mathbf{y}/\mathbf{y}^2|} \right] d\tau_{\mathbf{y}}. \quad (3.120)$$

**Beweis:**

Durch Verifikation von  $\Delta\varphi_1 = f, \varphi_1|_{\partial G} = 0$  (ausführlich in Burg/Haf/Wille (Partielle Dgln.) [13]).

Lässt man  $r$  gegen  $\infty$  streben, so ergibt sich

**Satz 3.14:**

Gelöst werden soll das *Ganzraumproblem*

$$\Delta\varphi = f \text{ auf } \mathbb{R}^3, \quad \max_{|\mathbf{x}|=r} |\varphi(\mathbf{x})| \rightarrow 0 \text{ für } r \rightarrow \infty \quad (3.121)$$

Die zweimal stetig differenzierbare Funktion  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  ist dabei gesucht und die stetige Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  vorgegeben. Sie erfülle  $f(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(1/|\mathbf{x}|^{2+\varepsilon})$  ( $\varepsilon > 0$ ) für  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ .<sup>55</sup> Es folgt: Die eindeutig bestimmte Lösung  $\varphi$  lautet

$$\varphi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\tau_{\mathbf{y}}. \quad (3.122)$$

Zum *Beweis*: Die Konvergenz des Integrals ergibt sich aus  $f(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(1/|\mathbf{x}|^{2+\varepsilon})$ . Die Eindeutigkeit ergibt sich ähnlich wie in Folgerung 3.6 im vorigen Abschnitt mit dem Maximumprinzip harmonischer Funktionen. Im Übrigen geht (3.122) aus (3.120) durch  $r \rightarrow \infty$  hervor.

<sup>54</sup>  $d\tau_{\mathbf{y}}$  markiert, dass sich die Integration auf  $\mathbf{y}$  bezieht.

<sup>55</sup>  $\Phi(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(h(|\mathbf{x}|))$  für  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  bedeutet  $|\Phi(\mathbf{x})| \leq c \cdot h(|\mathbf{x}|)$  für  $|\mathbf{x}| \geq R$  ( $c, R$  positive Konstanten). Also:

$\Phi(\mathbf{x}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^{2+\varepsilon}}\right) \Leftrightarrow |\Phi(\mathbf{x})| \leq \frac{c}{|\mathbf{x}|^{2+\varepsilon}}$  für  $|\mathbf{x}| \geq R$ .

**Bemerkung:** Ein analoger Satz gilt für die *Poisson-Gleichung in Vektorform*  $\Delta \mathbf{A} = \mathbf{B}$  auf  $\mathbb{R}^3$ . Falls  $\mathbf{B} = \mathcal{O}(1/|x|^{2+\varepsilon})$  ( $\varepsilon > 0$ ) und  $\max_{|x|=r} |\mathbf{A}(x)| \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$  gilt, lautet die eindeutig bestimmte Lösung

$$\mathbf{A}(x) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{B}(y)}{|x-y|} d\tau_y. \quad (3.123)$$

### Übung 3.18\*

Führe den Eindeutigkeitsbeweis für Satz 3.14 durch.

### 3.4.4 Quellfreiheit: $\operatorname{div} \mathbf{W} = \mathbf{0}$ , Vektorpotentiale

Gilt

$$\mathbf{W} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad 56$$

so nennt man das Feld  $\mathbf{A}$  ein *Vektorpotential* von  $\mathbf{W}$ .  $\mathbf{W}$  heißt ein *Wirbelfeld* (bzgl.  $\mathbf{A}$ ).

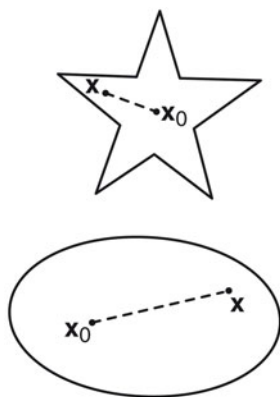


Fig. 3.23: Sternförmige Gebiete

Wir fragen uns: Unter welchen Voraussetzungen besitzt ein gegebenes Vektorfeld  $\mathbf{W}$  ein Vektorpotential?

Notwendig ist jedenfalls

$$\operatorname{div} \mathbf{W} = \mathbf{0}, \quad \text{d.h. } \mathbf{W} \text{ ist } \textit{quellfrei},$$

wegen  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{0}$ . Wir zeigen, dass dies auch hinreichend ist, jedenfalls in sogenannten *sternförmigen Gebieten*.

56 Alle Felder  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\varphi$  usw. in diesem Abschnitt haben gleichen Definitionsbereich  $M \subset \mathbb{R}^3$  ( $M$  offen) und sind darin so oft stetig differenzierbar, wie es die zugehörigen Formeln verlangen.

Dabei heißt ein Gebiet  $G$  im  $\mathbb{R}^n$  *sternförmig*, wenn es einen Punkt  $\mathbf{x}_0$  darin gibt, der mit jedem anderen Punkt  $\mathbf{x} \in G$  gradlinig in  $G$  verbunden werden kann.  $\mathbf{x}_0$  heißt ein *Zentrum* von  $G$  (s. Fig. 3.23). Z.B. sind alle konvexen offenen Mengen sternförmig (obwohl sie, landläufig betrachtet, nicht so aussehen).

**Satz 3.15:**

- (a) Ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $\mathbf{W}$  auf einem sternförmigen Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^3$  hat genau dann ein Vektorpotential  $\mathbf{A}$ , wenn  $\operatorname{div} \mathbf{W} = 0$  gilt. Kurz:

$$\operatorname{div} \mathbf{W} = 0 \iff \exists \mathbf{A} : \mathbf{W} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \tag{3.124}$$

Folgende Formel gibt ein Vektorpotential von  $\mathbf{W}$  an, wobei  $\mathbf{x}_0$  ein Zentrum von  $G$  ist:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) := \int_0^1 t \mathbf{W}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) dt \tag{3.125}$$

- (b) Zwei Vektorpotentiale von  $\mathbf{W}$  unterscheiden sich nur durch ein Gradientenfeld. Genauer: Ist  $\mathbf{A}$  ein Vektorpotential von  $\mathbf{W}$ , so ist die Menge aller Vektorpotentiale von  $\mathbf{W}$  gegeben durch

$$\mathbf{A} + \operatorname{grad} \varphi. \tag{3.126}$$

**Beweis:**

- (a) Es sei  $\operatorname{div} \mathbf{W} = 0$ . O.B.d.A. nehmen wir  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  an (sonst vorher Nullpunktverschiebung). Formel (3.125) lautet damit

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_0^1 t (\mathbf{W}(t\mathbf{x}) \times \mathbf{x}) dt. \tag{3.127}$$

Zu zeigen ist, dass dies ein Vektorpotential von  $\mathbf{W}$  ist, d.h. dass  $\operatorname{rot}$ , angewandt auf das Integral,  $\mathbf{W}(\mathbf{x})$  liefert. Das geschieht durch Rechnung, wobei Formel (j) aus Abschnitt 3.3.2 verwendet wird:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \int_0^1 t (\mathbf{W}(t\mathbf{x}) \times \mathbf{x}) dt &\stackrel{57}{=} \int_0^1 t \operatorname{rot} (\mathbf{W}(t\mathbf{x}) \times \mathbf{x}) dt \\ &\stackrel{(j)}{=} \int_0^1 t \left[ \underbrace{\mathbf{W}(t\mathbf{x})}_{\mathbf{3}} \operatorname{div} \mathbf{x} + t \mathbf{W}'(t\mathbf{x}) \mathbf{x} - \mathbf{W}(t\mathbf{x}) \right] dt \\ &= \int_0^1 \left( 2t \mathbf{W}(t\mathbf{x}) + t^2 \frac{d}{dt} \mathbf{W}(t\mathbf{x}) \right) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} (t^2 \mathbf{W}(t\mathbf{x})) dt = \left[ t^2 \mathbf{W}(t\mathbf{x}) \right]_0^1 \\ &= \mathbf{W}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

- (b) Es sei  $\mathbf{A}$  ein gegebenes Vektorpotential von  $\mathbf{W}$ , z.B. das in (3.125). Dann ist auch  $\mathbf{A} + \text{grad } \varphi$  ein Vektorpotential von  $\mathbf{W}$ , wegen  $\text{rot grad } \varphi = 0$ .

Ist umgekehrt  $\mathbf{A}_0$  ein beliebiges Vektorpotential von  $\mathbf{W}$ , so gilt mit einem vorgegebenen Vektorpotential  $\mathbf{A}$ :

$$\text{rot}(\mathbf{A}_0 - \mathbf{A}) = \text{rot } \mathbf{A}_0 - \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

Nach Abschnitt 3.4.1 existiert damit ein  $\varphi$  mit  $\mathbf{A}_0 - \mathbf{A} = \text{grad } \varphi$ , also  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A} + \text{grad } \varphi$ .  $\square$

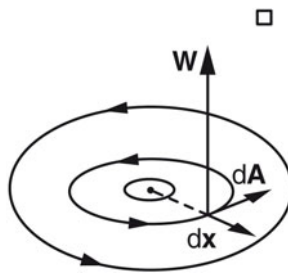


Fig. 3.24: Zur Konstruktion eines Vektorpotentials  $\mathbf{A}$

**Bemerkung:** Wie kommt man auf die Formel (3.125) für  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ , oder im Falle  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  auf (3.127)?

Wir wissen folgendes: Ist  $\mathbf{W}$  konstant, so beschreibt

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{W} \times \mathbf{x}$$

ein Vektorpotential von  $\mathbf{W}$  (vgl. Beisp. 3.3, Abschn. 3.2.3). So liegt es nahe, bei nicht konstantem  $\mathbf{W}$  den infinitesimalen Ansatz

$$d\mathbf{A} = \alpha \mathbf{W} \times d\mathbf{x}$$

zu versuchen, wobei  $\alpha$  ein noch zu bestimmender Skalar ist (vgl. Fig.3.24). Integration auf der Strecke  $S_x$  von  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  bis  $\mathbf{x}$  liefert dann

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_{S_x} \alpha(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{W}(\boldsymbol{\xi}) \times d\boldsymbol{\xi} = \int_0^1 \alpha(t\mathbf{x}) \mathbf{W}(t\mathbf{x}) \times \mathbf{x} dt.$$

Man wendet nun  $\text{rot}$  auf das rechte Integral an, mit dem Ziel,  $\mathbf{W}(\mathbf{x})$  herauszubekommen. Hierbei hat man  $\alpha$  frei zur Verfügung. Durch Anwendung von  $\text{rot}$  auf den Integranden rechts und Probieren findet man heraus, dass  $\alpha(t\mathbf{x}) = t$  alles erfüllt.

57  $\text{rot}$  bezieht sich auf  $\mathbf{x}$ .

Physikalisch ausgedrückt lautet der bewiesene Satz für *sternförmige Gebiete* folgendermaßen:

- (a) *Jedes quellfreie Vektorfeld ist ein Wirbelfeld, und umgekehrt.*
- (b) *ist eine Art Eindeutigkeitsaussage, nämlich: Das Vektorpotential eines quellfreien Feldes ist bis auf ein additives Gradientenfeld eindeutig bestimmt.*

**Bemerkung:** Ist ein Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^3$  im  $\mathbb{R}^3$  nicht sternförmig, jedoch Vereinigung endlich vieler sternförmiger Gebiete  $G_1, \dots, G_n$ , so kann man in jedem  $G_i$  ein Vektorpotential  $A_i$  zu  $\mathbf{W} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$  (mit  $\operatorname{div} \mathbf{W} = 0$ ) finden. Durch Addition von Gradientenfeldern kann man in den Schnittmengen  $G_i \cap G_j$  zu einheitlichen Vektorpotentialen kommen. So lässt sich durch Fortsetzung über  $G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow \dots \rightarrow G_n$  in praktischen Fällen meistens ein Vektorpotential auf ganz  $G$  finden.

**Anwendungen:** Inkompressible Flüssigkeiten haben *divergenzfreie Geschwindigkeitsfelder*  $\mathbf{W}$ . (Die Gleichung  $\operatorname{div} \mathbf{W} = 0$  heißt dabei die »Kontinuitätsbedingung«.) Selbst Luft, bei niedrigen Ausströmgeschwindigkeiten (Fluggeschwindigkeiten) wird als inkompressibel angenommen. Folglich lebt die *Aerodynamik* zu einem nicht unwesentlichen Teil von divergenzfreien Feldern.

In der Elektrodynamik wird die *magnetische Induktion* als *quellfrei* angenommen, und bei Wellenausbreitung in ruhenden homogenen Medien (sowie im Vakuum) auch die *magnetische* und (an ladungsfreien Stellen) die *elektrische Feldstärke*. Daraus werden (im Rahmen der Maxwell'schen Theorie) weitreichende Schlüsse gezogen.

Auf Quadern lassen sich Vektorpotentiale einfacher als in Formel (3.125) ermitteln, wie die folgende Übung zeigt:

**Übung 3.19:**

Es sei  $\mathbf{W} : Q \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einem offenen Quader  $Q \subset \mathbb{R}^3$ . Es gelte  $\operatorname{div} \mathbf{W} = 0$  auf  $Q$ .  $\mathbf{x}_0 = [x_0, y_0, z_0]^T$  sei ein beliebiger Punkt aus  $Q$ . Zeige, dass durch folgende Formel ein Vektorpotential von  $\mathbf{W} = [W_1, W_2, W_3]^T$  gegeben ist:

$$A(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 \\ \int_{x_0}^x W_3(\xi, y, z) d\xi \\ - \int_{x_0}^x W_2(\xi, y, z) d\xi + \int_{y_0}^y W_1(x_0, \eta, z) d\eta \end{bmatrix}. \tag{3.128}$$

*Anmerkung:* Wie kommt man darauf? – Da es ein Vektorpotential  $A_0$  zu  $\mathbf{W}$  gibt (Satz 3.14), gibt es auch ein Vektorpotential  $A = [A_1, A_2, A_3]^T$  mit  $A_1 = 0$ . Denn man kann  $\varphi$  so wählen, dass diese Bedingung für  $A = A_0 + \operatorname{grad} \varphi$  erfüllt ist. Bei genauem hinschauen hat man noch einige weitere Freiheiten für  $\varphi$ . Die kann man so nutzen, dass  $A_2(x_0, y, z) \equiv 0$  und  $A_3(x_0, y_0, z) \equiv 0$  wird. Damit lässt sich  $\operatorname{rot} A = \mathbf{W}$  (d.h.  $A_{3,y} - A_{2,z} = W_1, A_{3,x} = -W_2, A_{2,x} = W_3$  leicht integrieren, wobei man mit den letzten beiden Gleichungen beginnt. Man erhält (3.128).

**3.4.5 Quellfreie Vektorpotentiale**

Mit  $B$  wird im vorliegenden Abschnitt stets ein *sternförmiger, stückweise glatt berandeter Bereich* im  $\mathbb{R}^3$  bezeichnet, auf dem das *Dirichlet-Problem stets lösbar* ist.  $B$  nennen wir kurz »gutartig«.



Wir wissen, dass jedes quellfreie Vektorfeld  $\mathbf{W} : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  — also ein Feld mit  $\operatorname{div} \mathbf{W} = 0$  — ein Vektorpotential  $\mathbf{A}$  besitzt, d.h.

$$\mathbf{W} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (3.129)$$

(s. Abschn. 3.4.4). Dabei ist  $\mathbf{A}$  nur bis auf Summanden der Form  $\operatorname{grad} \varphi$  bestimmt. Man kann nun  $\varphi$  so wählen, dass  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$  wird, dass also  $\mathbf{A}$  auch quellfrei wird. Insbesondere in der Elektrodynamik wird davon vielfach Gebrauch gemacht. Es gilt also

**Satz 3.16:**

Jedes quellfreie Vektorfeld  $\mathbf{W} : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  auf einem »gutartigen« Bereich  $B$  besitzt ein quellfreies Vektorpotential.

**Beweis:**

Ist  $\mathbf{A}_0$  ein gegebenes Vektorpotential von  $\mathbf{W}$  (z.B. dasjenige aus Satz 3.15 im vorigen Abschnitt), so bilden wir

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \operatorname{grad} \varphi \quad \text{und fordern} \quad 0 = \operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{div} \mathbf{A}_0 + \Delta \varphi,$$

d.h.

$$\Delta \varphi = -\operatorname{div} \mathbf{A}_0 \quad \text{auf } B.$$

Diese Differentialgleichung hat mindestens eine Lösung  $\varphi$  auf  $B$ . Damit ist  $\mathbf{A}$  quellfrei:  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ , und es gilt  $\mathbf{W} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ .  $\square$

Ein entsprechender Satz gilt, wenn  $\mathbf{W}$  auf dem ganzen Raum  $\mathbb{R}^3$  definiert ist. Allerdings muss über das »Verschwinden im Unendlichen« eine Voraussetzung gemacht werden. Dann kann man ein quellfreies Vektorpotential sogar formelmäßig angeben.

**Satz 3.17:**

Es sei  $\mathbf{W} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein quellfreies Vektorfeld, welches

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^{2+\varepsilon}}\right) \quad (\varepsilon > 0) \quad \text{und} \quad \mathbf{W}'(\mathbf{x}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^{3+\varepsilon}}\right) \quad \text{für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty$$

erfüllt. Dann beschreibt folgende Formel ein quellfreies Vektorpotential von  $\mathbf{W}$  auf  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\operatorname{rot} \mathbf{W}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\tau_{\mathbf{y}} \quad (3.130)$$

**Beweis:**

Es gilt  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$  wie man durch Vertauschen von  $\operatorname{div}$  mit den Integralzeichen sofort sieht. Formel (3.123) in Abschnitt 3.4.3 nebst zugehöriger Bemerkung lehrt, dass

$$\Delta \mathbf{A} = -\operatorname{rot} \mathbf{W}$$

gilt. Verwendet man die Formel  $\Delta \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}$  und berücksichtigt  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$  so folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \operatorname{rot} \mathbf{W} \Rightarrow \operatorname{rot}(\mathbf{W} - \operatorname{rot} \mathbf{A}) = 0 \\ &\Rightarrow \mathbf{W} - \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \varphi \end{aligned} \quad (3.131)$$

nach Abschnitt 3.4.1. Die rechte Gleichung liefert

$$\operatorname{grad} \varphi(\mathbf{x}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right) \quad \text{für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad \Delta \varphi = 0,$$

letzteres durch Anwenden von  $\operatorname{div}$  auf die Gleichung.

Daraus folgt durch Integration

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_0^1 \operatorname{grad} \varphi(t\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} dt + c,$$

wobei wir  $c = 0$  wählen. Folglich gilt  $\varphi(\mathbf{x}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right)$ . Anwendung der ersten Greenschen Formel ergibt

$$\iiint_{K_r} (\operatorname{grad} \varphi)^2 d\tau = \iint_{\partial K_r} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} d\sigma \stackrel{58}{\rightarrow} 0 \quad \text{für } R \rightarrow \infty,$$

also  $\operatorname{grad} \varphi = 0$ . (3.131) liefert damit  $\mathbf{W} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ , was zu beweisen war.  $\square$

**3.4.6 Helmholtzischer Zerlegungssatz**

Ein gegebenes Vektorfeld  $\mathbf{V} : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  soll in einen wirbelfreien Anteil  $\mathbf{V}_1$  und einen quellfreien Anteil  $\mathbf{V}_2$  zerlegt werden:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2. \quad (3.132)$$

Dabei kann man auf »gutartigen« Bereichen<sup>59</sup>  $\mathbf{V}_1 = \operatorname{grad} \varphi$  und  $\mathbf{V}_2 = \operatorname{rot} \mathbf{A}$  schreiben. Wir beweisen also folgenden Satz:

58  $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \varphi$ .

59 s. Beginn des vorangehenden Abschnittes.

**Satz 3.18:**

(Helmholtz'scher<sup>60</sup> Zerlegungssatz auf kompakten Bereichen) Jedes stetig differenzierbare Vektorfeld  $V$  auf einem »gutartigen« Bereich  $B$  lässt sich als Summe eines wirbelfreien und eines quellfreien Vektorfeldes schreiben. D.h. es gilt

$$V = \text{grad } \varphi + \text{rot } A . \quad (3.133)$$

mit einem Skalarfeld  $\varphi$  und einem Vektorfeld  $A$  auf  $B$ .

Zusatz:  $A$  kann dabei quellfrei gewählt werden:  $\text{div } A = 0$ .

**Beweis:**

Gibt es eine Zerlegung der Form (3.133), so ergibt die Divergenzbildung in (3.133)

$$\text{div } V = \Delta \varphi , \quad (3.134)$$

und damit eine Differentialgleichung für  $\varphi$ .

Wir drehen den Spieß jetzt um, d.h. wir gehen von einer Lösung  $\varphi$  der Gleichung (3.134) aus. (Sie existiert, da  $B$  gutartig). (3.134) lässt sich wegen  $\Delta = \text{div grad}$  umschreiben in

$$\text{div}(V - \text{grad } \varphi) = 0 .$$

Nach Satz 3.16 im vorigen Abschnitt gibt es damit ein (quellfreies) Vektorfeld  $A$  mit

$$V - \text{grad } \varphi = \text{rot } A .$$

womit der Satz bewiesen ist. □

Schließlich gilt auf ganz  $\mathbb{R}^3$  ein entsprechender Zerlegungssatz. Dabei ist es recht befriedigend, dass man die auftretenden Potentiale  $\varphi$  und  $A$  durch explizite Formeln angeben kann.

**Satz 3.19:**

(Helmholtz'scher Zerlegungssatz auf  $\mathbb{R}^3$ ) Es sei  $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld, das

$$V(\mathbf{x}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^{2+\varepsilon}}\right) \quad (\varepsilon > 0) \quad \text{und} \quad V'(\mathbf{x}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^{3+\varepsilon}}\right) \quad \text{für} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty$$

erfüllt. Dann lässt sich  $V$  in folgende Summe zerlegen:

$$V = \text{grad } \varphi + \text{rot } A \quad (3.135)$$

mit

<sup>60</sup> Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821 – 1894), deutscher Physiologe und Physiker.

$$\varphi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\tau_{\mathbf{y}}, \quad (3.136)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\operatorname{rot} \mathbf{V}(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\tau_{\mathbf{y}}. \quad (3.137)$$

**Beweis:**

Das Skalarfeld  $\varphi$  in (3.136) erfüllt  $\Delta\varphi = \operatorname{div} \mathbf{V}$  (nach Satz 3.13, Abschn. 3.4.3). Mit  $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$  gilt folglich  $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{div} \mathbf{V}$ , umgeformt also

$$\operatorname{div}(\mathbf{V} - \operatorname{grad} \varphi) = 0.$$

$\mathbf{V} - \operatorname{grad} \varphi$  hat somit ein (quellfreies) Vektorpotential  $\mathbf{A}$ , welches nach Satz 3.17 im vorigen Abschnitt die Form

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\operatorname{rot}(\mathbf{V} - \operatorname{grad} \varphi)(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\tau_{\mathbf{y}}$$

haben kann. Wegen  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \mathbf{0}$  ist dies gleich (3.137). Das Vektorpotential  $\mathbf{A}$  von  $\mathbf{V} - \operatorname{grad} \varphi$  erfüllt die Gleichung  $\mathbf{V} - \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ , also (3.135), was zu beweisen war.  $\square$

**Bemerkung 1:** In der Strömungsmechanik sowie in der Elektrodynamik (Maxwellsche Gleichungen) wird mit der obigen Zerlegung viel gearbeitet.

**Bemerkung 2:** Die in Abschnitt 3 gewonnenen Integralsätze sind für die Behandlung partieller Differentialgleichungen von zentraler Bedeutung. Einige Beispiele haben wir bereits kennengelernt. Zahlreiche weitere Beispiele finden sich z.B. in Burg/Haf/Wille (Partielle Dgln.) [13].