

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Harmonische Analyse – The name of the game...</b>	<b>2</b>
0.1	Die Entwicklung bis etwa 1900 . . . . .	2
0.2	Die Entwicklung im 20. Jahrhundert . . . . .	7
<b>1</b>	<b>Handwerkszeug</b>	<b>11</b>
1.1	Das LEBESGUE-Integral . . . . .	11
1.1.1	Die Philosophie des Maßintegrals . . . . .	11
1.1.2	Das LEBESGUESche Maß . . . . .	15
1.1.3	Messbare Funktionen und das Integral von Treppenfunktionen . . . . .	20
1.1.4	Konvergenzsätze für nichtnegative Funktionen . . . . .	22
1.1.5	Das Integral für allgemeine messbare Funktionen . . . . .	23
1.1.6	Konvergenzsätze für messbare Funktionen . . . . .	26
1.2	$L^p$ -Räume . . . . .	28
1.2.1	Geschichtliches . . . . .	28
1.2.2	Die Definition der Räume $L^p(E)$ . . . . .	30
1.2.3	HILBERTräume . . . . .	33

# 0 Harmonische Analyse – The name of the game. . .

Die harmonische Analyse der Mathematik ist nicht nur namentlich eng verwandt mit der Harmonielehre der Musik, denn beide Wissenschaften handeln streng genommen von Schwingungen. Aber während sich die Musik auch mit den Eigenheiten des menschlichen Gehörs beschäftigt, etwa der Wahrnehmung von Residualtönen oder auf ein kompaktes Frequenzintervall beschränkt zu sein, macht die mathematische Disziplin der harmonischen Analyse von einem unendlichen Frequenzspektrum Gebrauch. Gleichwohl hat sie in ihrer Entstehung den größten Antriebsimpuls bekommen, als eine schwingende Saite physikalisch beschrieben werden sollte.

Aber die Ursprünge reichen eigentlich weiter zurück.

## 0.1 Die Entwicklung bis etwa 1900

Den Beginn der Entwicklung kann man streng genommen in der Antike bei den Pythagoräern sehen. PYTHAGORAS VON SAMOS (\* um 570 v. Chr., † nach 510 v. Chr.) lebte nach dem Grundsatz „Alles ist Zahl“ und versuchte, überall Zahlenverhältnisse zu finden. Die Legende berichtet, dass er einen numerischen Zusammenhang entdeckte zwischen der Größe eines Hammers und dem Klang, den dieser beim Schlagen auf einen Amboss erzeugte, als er an einer Schmiede vorbeiging. Alle Hämmer bis auf einen sollen gut zusammen geklungen haben, aber dieser eine erzeugte einen Misston. Pythagoras stellte fest, dass die Hämmer, welche gut zusammen klangen, in der Größe entweder identisch waren oder in einem einfachen Größenverhältnis  $x : y$  zueinander standen, wobei  $x$  und  $y$  zwei „kleine“ natürliche Zahlen sind.

Mit diesem Wissen untersuchte er den Klang eines gezupften Monochords, eines Instrumentes mit einer Saite; auch hier bemerkte er, dass zwei gezupfte Saiten zusammen einen angenehmen Ton hervorbrachten, wenn das Verhältnis ihrer Längen zueinander möglichst einfach war, d. h. sich durch einen Bruch mit möglichst kleinem Zähler und Nenner ausdrücken ließ. Die einfachsten solchen Verhältnisse sind

- $2 : 1$ , die Oktave, und
- $3 : 2$ , die Quinte.

Die Quarte, deren Teilungsverhältnis 4 : 3 ist, klingt ebenfalls noch konsonant. Demgegenüber klingt eine doppelte Quinte (musikalisch: eine None), deren Teilungsverhältnis 9 : 4 ist, dissonant.

Ob die Pythagoräer die Erklärung dafür im Klangspektrum eines Instruments, nämlich den *Obertönen* gefunden haben, ist nicht bekannt. Die Quinte klingt deshalb konsonant, weil dies der Abstand zwischen dem ersten (Oktave) und dem zweiten Oberton (Duodezime) eines Grundtons ist.

Spätestens ab der Renaissance dürfte dies aber bekannt gewesen sein, denn nun begann sich der Orgelbau richtig zu entfalten. Wurde die Orgel während des Mittelalters zur reinen einstimmigen Begleitung des Gesangs benutzt (und um den Chor vor melodischen Fallen zu bewahren), entstand mit dem mehrstimmigen Gesang auch die mehrstimmige Orgelmusik, und für diese wurden verschieden klingende Register gebaut.

Ab der Hochrenaissance im 16. Jahrhundert wurden bereits Register in Orgeln eingebaut, welche den Klang zeitgenössischer Instrumente nachbilden, etwa Trompete, Posaune, Schalmei oder Krummhorn.

Dies war in etwa der Stand der Dinge, als JEAN BAPTISTE LE ROND D'ALEMBERT (1717 – 1783) sich 1747 daran begab, eine schwingende Saite mathematisch zu modellieren. Er machte den Ansatz, dass die Saite in den Punkten  $x = 0$  und  $x = \ell$  eingespannt ist und zum Zeitpunkt  $t = 0$  um die Funktion  $g(x)$  von der Ruhelage entfernt ist und dann losgelassen wird und (der Einfachheit halber zunächst einmal ungedämpft) schwingt. Seine Betrachtungen führten ihn zu der Erkenntnis, dass die Auslenkung  $y(x, t)$  der Saite zum Zeitpunkt  $t$  und im Punkt  $x$  durch folgende partielle Differentialgleichung beschrieben wird:

$$(0.1) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Als Lösung gab er

$$y(x, t) = f(x + \alpha t) - f(-x + \alpha t)$$

mit einer geeigneten Funktion  $f$  an, die sich aus der Anfangsauslenkung  $g$  errechnet. Im unmittelbaren Anschluss untersucht er den Fall, dass die Funktion  $f$  periodisch mit Periode  $2\ell$  ist, dass also  $f(x) = f(x + 2\ell)$  ist.

Es war der Verdienst LEONHARD EULERS (1706 – 1783), im Jahr darauf die Bedingungen, denen die Funktion  $g$  genügen muss, dahingehend zu verallgemeinern, dass auch unstetige Funktionen zulässig sind (etwa bei einer gezupften Saite). Er bemerkte, dass das Problem der schwingenden Saite schon gelöst ist, wenn man die Anfangsauslenkung  $g(x) = y(x, 0)$  und die Anfangsgeschwindigkeit  $\partial y / \partial t(x, 0)$  kennt. Dann errechnen sich die Lösungen nämlich als

$$f(x) - f(-x) = g(x) \quad f(x) + f(-x) = \frac{1}{\alpha} \int \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) dx$$

für  $-\ell < x < \ell$ .

D’ALEMBERT verwarfte sich gegen EULERS Verallgemeinerung, weil er für seinen Ansatz vorsah, dass  $y$  in beiden Variablen analytisch ist. Noch ehe EULER hierauf erwiderte, erschien 1753 zu diesem Thema auch ein Artikel von DANIEL BERNOULLI (1700 – 1782). Dieser griff eine Lösung auf, die bereits der englische Mathematiker BROOK TAYLOR (1685 – 1731) in einer Arbeit publiziert hatte, nämlich, dass die Gleichung (0.1) und ihre Randbedingungen für die Funktion

$$y = \sin \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi \alpha t}{\ell}$$

erfüllt sind. BERNOULLI ging aber noch einen Schritt weiter und ließ sich von der Erfahrung der Musiker inspirieren, nämlich dass der Klang der Saite eine Überlagerung des Grundtones und der Obertöne ist. Aus dieser physikalischen Überlegung folgte er, dass die Saite theoretisch also auch der Gleichung

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi \alpha}{\ell} (t - \beta_n)$$

genügen könne, die die obigen Gleichungen als Spezialfälle enthielt und damit die allgemeinste Lösung des Problems darstelle. Der Spezialfall  $t = 0$  führte zu der Gleichung

$$y(x, 0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

für die Anfangsauslenkung, was EULER zu einer sofortigen Antwort bewegte:<sup>1</sup> BERNOULLIS Lösung sei dann und nur dann allgemein, wenn sich jede beliebige Funktion über dem Intervall  $[0, \ell]$  durch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} + \frac{1}{2} b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi x}{\ell}$$

darstellen lasse. Da sowohl EULER als auch D’ALEMBERT und später noch JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736 – 1813) den Standpunkt vertraten, die Sinus- und Kosinusfunktionen hätten zu starke analytische Eigenschaften, um damit etwa eine unstetige Funktion darstellen zu können, wurde der Streit fürs erste gegen BERNOULLI entschieden.

Für die nächsten Jahrzehnte rührte sich in dieser Frage nichts, bis JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768 – 1830) – ironischerweise LAGRANGES Nachfolger als Professor für Analysis und Mechanik an der École Polytechnique – im Jahr 1807 eine Arbeit zur Wärmeleitung einreichte. FOURIER bemerkte, dass wenn  $f$  durch eine trigonometrische

---

<sup>1</sup>EULERS Arbeit ist in den *Mémoires de l’académie de Berlin* des Jahres 1753 in direktem Anschluss an BERNOULLIS Artikel abgedruckt.

Reihe gegeben ist (über Fragen der Konvergenz einmal großzügig hinweggesehen), also gilt

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx + \frac{1}{2}b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx$$

sich die Koeffizienten durch die Formeln

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

errechnen.

FOURIER behauptete nun, dass dies auch gelte, wenn die Funktion  $f$  „ganz willkürlich“ sei, was dem damaligen Verständnis nach einer unstetigen Funktion entspricht. Der knapp zweiundsiebzigjährige LAGRANGE war von dieser Behauptung so überrascht, dass er ihr zunächst einmal *auf das Entschiedenste entgegentrat*.<sup>2</sup> Aus diesem Grund wurde FURIERS Arbeit nicht veröffentlicht. 1810 jedoch schrieb die französische Akademie der Wissenschaften eine Preisaufgabe zur Wärmeleitung aus, an der sich FOURIER mit einer überarbeiteten Version seiner Abhandlung von 1807 beteiligte und den Wettbewerb gewann.

1822 veröffentlichte er sein Hauptwerk „*Théorie analytique de la chaleur*“, in welchem er noch einen Schritt weiter ging: nachdem er festgestellt hatte, dass sich periodische Funktionen bequem durch eine trigonometrische Reihe darstellen ließen, wandte er dieselbe Idee auf nichtperiodische Funktionen an und kam so zur FOURIER-Transformation. Ihren Wert offenbarte diese erst im Laufe der folgenden Jahre, als erkannt wurde, dass sie ein extrem nützliches Werkzeug darstellt, um partielle Differentialgleichungen zu behandeln.

Trotz seiner beachtlichen Leistungen in der Theorie der trigonometrischen Reihen blieb FOURIER auf die Frage, wann diese Reihen denn konvergieren, viele Antworten schuldig. Der hauptsächliche Grund hierfür war, dass FOURIER wie auch die meisten seiner Zeitgenossen übersehen hatten, dass Konvergenzaussagen nur für absolut konvergente Reihen bequem gezeigt werden können, was bei trigonometrischen Reihen aber nur in begrenzten Fällen vorkommt. Eine erste Lösung aus diesem Dilemma brachte erst einer von FURIERS Studenten: JOHANN PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET.

DIRICHLET, Jahrgang 1805, studierte von 1822 bis 1826 in Paris unter anderem bei FOURIER, SIMEON DENIS POISSON (1781 – 1840) und SILVESTRE FRANÇOIS LACROIX (1765

---

<sup>2</sup>So GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826 – 1866) in seiner Habilitationsschrift. RIEMANN führt weiter aus, „*Nach einer mündlichen Mittheilung des Herrn Professor Dirichlet*“ solle „*sich hierüber noch ein Schriftstück im Archiv der Pariser Akademie befinden*“. JOHANN PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1805 – 1859), der in Paris mit FOURIER zusammen geforscht hatte, dürfte den fraglichen Brief LAGRANGES zu Gesicht bekommen haben.

– 1843) und erntete seine ersten wissenschaftlichen Lorbeeren für die wesentlichen Vorarbeiten zum Beweis der FERMATSchen Vermutung für  $n = 5$ . Ohne formal promoviert zu haben, habilitierte er sich 1827 in Breslau<sup>3</sup> und wechselte kurz darauf an die Berliner Universität.

1829 erschien in CRELLES Journal<sup>4</sup> eine Arbeit DIRICHLETS, in welcher für „*Functionen, die durchgehends eine Integration zulassen und nicht unendlich viele Maxima und Minima haben, die Frage ihrer Darstellbarkeit durch trigonometrische Reihen in aller Strenge entschieden wurde*“, wie RIEMANN es in seiner Habilitationsschrift formulierte. Dabei handelt es sich um periodische Funktionen einer reellen Veränderlichen, die stückweise stetig und monoton und von beschränkter Variation sind. Wie RIEMANN bemerkt, sei DIRICHLET damit der eigentliche Schöpfer der trigonometrischen Reihen gewesen. DIRICHLET zeigte also für diese Klasse von Funktionen, daß ihre FOURIERreihen konvergieren und auch wirklich die Funktion darstellen. In einer Arbeit von 1837<sup>5</sup> erweitert er diese Ergebnisse.

Obwohl die Funktionen, die er betrachtet, nicht ganz so willkürlich sind, wie wir es heute gewöhnt sind, erhält DIRICHLET folgendes Resultat:

**Satz 0.1.1** *Sei  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  stückweise stetig und von beschränkter Variation. Dann konvergiert die FOURIERreihe von  $f$  im Punkt  $x$  gegen*

$$s(x) := \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2},$$

*also gegen  $f(x)$ , falls  $f$  in  $x$  stetig ist.*

RIEMANN führt weiter aus: „*In der That für alle Fälle der Natur, um welche es sich allein handelte, war [die Frage nach der Entwickelbarkeit in eine trigonometrische Reihe] vollkommen erledigt, denn so gross auch unsere Unwissenheit darüber ist, wie sich die Kräfte und Zustände der Materie nach Ort und Zeit um Unendlichkleinen ändern, so können wir doch sicher annehmen, dass die Functionen, auf welche sich die Dirichlet'sche Untersuchung nicht erstreckt, in der Natur nicht vorkommen.*“ Allerdings verdienen die Fälle, die DIRICHLET ausgelassen hatte, besondere Beachtung, denn nachdem die trigonometrischen Reihen als Werkzeug der Zahlentheorie mit Erfolg eingesetzt waren, wurden sie auch zu Objekten der reinen Mathematik.

Den Funktionen, die DIRICHLET nicht in seine Betrachtungen aufgenommen hatte, widmete sich RIEMANN 1854 in seiner Habilitationsschrift „*Ueber die Darstellbarkeit einer*

<sup>3</sup>Da die Universität Breslau darauf bestand, dass er vor der Habilitation einen Dokortitel vorzuweisen habe, wurde ihm ein solcher Titel ehrenhalber von der Universität Bonn verliehen.

<sup>4</sup>Sur la convergence des series trigonometriques qui servent a representer une fonction arbitraire entre des limites donnees. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band IV, Seite 157

<sup>5</sup>„Ueber die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen.“

*Function durch eine trigonometrische Reihe*“ und muss dazu zunächst einmal einen leistungsfähigen Integralbegriff schaffen.<sup>6</sup>

In seiner Arbeit dreht RIEMANN die Sichtweise um und fragt sich, welche Bedingungen an eine Funktion  $f$  gelten müssen, damit sie in eine trigonometrische Reihe entwickelt werden kann und diese (punktweise, bis auf Unstetigkeitsstellen) konvergiert.

## 0.2 Die Entwicklung im 20. Jahrhundert

Das Jahr 1900 bildet keine strenge Trennlinie in der historischen Entwicklung, aber in den Jahren zwischen etwa 1875 und 1920 griff der Umwälzungsprozess, der die gesamte Mathematik hin zur Axiomatisierung und letztendlich zu ihrer Grundlagenforschung führte, auch auf die harmonische Analyse über:

- Nachdem der Begriff des Vektorraums sich von der Vorstellung des  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  gelöst hatte, ging man auch dazu über, Funktionen als Vektoren und Integrale als lineare Abbildungen zu betrachten;
- insbesondere löste sich der Begriff der Orthogonalität von der geometrischen Vorstellung im zwei- oder dreidimensionalen EUKLIDISCHEN Raum. Plötzlich waren auch die Funktionen  $x \mapsto \exp(ikx)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  zueinander paarweise orthogonal;
- mit seiner Dissertation „*Intégrale, longueur, aire*“, die 1902 veröffentlicht wurde, hat HENRI LÉON LEBESGUE (1875 – 1941) einen neuen Integralbegriff eingeführt, der sich als deutlich leistungsfähiger erwies als das RIEMANNSCHE Integral. Der große Vorteil des LEBESGUE-Integrals ist, dass eine gleichmäßig beschränkte Reihe von integrierbaren Funktionen, deren Schranke ihrerseits wieder integrierbar ist, die Vertauschung von Integration und Summation erlaubt; die Behauptung FOURIERS, dass wenn eine Funktion durch eine trigonometrische Reihe dargestellt werden kann, diese Reihe auch ihre FOURIERREIHE ist, wurde nun endlich auf ein solides Fundament gestellt;
- 1906 führte MAURICE RENÉ FRÉCHET (1878 – 1973) in seiner Dissertation „*Sur quelques points du calcul fonctionnel*“ den Begriff des metrischen Raumes ein, auf dem STEFAN BANACH (1892 – 1945) das neue Gebiet der Funktionalanalysis gründete. Der Kern der Funktionalanalysis ist eine gründliche Untersuchung von Funktionenräumen. Praktischerweise sind die Räume, für deren Elemente man FOURI-

---

<sup>6</sup>Ironischerweise ist das hier erstmals in Erscheinung tretende RIEMANN-Integral auch nicht in der Lage, die Funktion  $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$  zu integrieren, die von DIRICHLET als Beispiel dafür angegeben wurde, was man auch unter einer Funktion verstehen kann.

erreichen untersucht, vollständige metrische Räume, so dass die Konvergenz (bezüglich der Metrik des Raumes) nicht durch „Löcher“ zunichte gemacht wird.

FOURIERreihen wurden ab diesem Zeitraum mit einem machtvollen Apparat an neuen Werkzeugen untersucht. Die Kehrseite dieser Werkzeuge ist, dass Aussagen über Funktionen, bei denen Stetigkeit nicht mehr vorausgesetzt wird, sondern nur noch (LEBESGUE-)Integrierbarkeit, die Ergebnisse des 19. Jahrhunderts scheinbar komplett über den Haufen werfen. ANDREI NIKOLAJEWITSCH KOLMOGOROW (1903 – 1987) konstruierte 1926 eine Funktion  $f$ , die über dem Intervall  $[-\pi, \pi]$  integrierbar ist, deren FOURIERreihe aber in keinem Punkt gegen  $f$  konvergiert. Demgegenüber zeigte 40 Jahre später der Schwede LENNART AXEL EDVARD CARLESON (\* 1928), dass die FOURIERreihe einer quadratisch integrierbaren Funktion wenigstens *fast überall* gegen die Funktion konvergiert.

Parallel zur Entwicklung der Funktionalanalysis dehnte sich die Untersuchung von (formalen) FOURIERreihen auf das Gebiet der Algebra aus, eine Disziplin, die heute als *abstrakte harmonische Analyse* bezeichnet wird. Hintergrund hierfür ist die Beobachtung von HERMANN KLAUS HUGO WEYL (1885 – 1955) und FRITZ PETER (1899 – 1945), dass in der Darstellungstheorie kompakter LIE-Gruppen ebenfalls orthogonale Funktionen auftreten.

Entwicklungen nach orthogonalen Funktionen treten auch an anderer prominenter Stelle auf, und wieder stand für die ersten Untersuchungen die Musik Pate: beim Problem der schwingenden Membran.

Im Gegensatz zu der doch recht einfach zu behandelnden schwingenden Saite, die im Wesentlichen nur durch ihre Länge bestimmt ist, hat man bei einer schwingenden Membran auch die Form ihres Randes zu berücksichtigen, oder bildlich gesprochen: von einer runden Pauke erwartet man einen anderen Klang als von einer quadratischen.

Erste Untersuchungen dazu wurden von POISSON und DIRICHLET unternommen. Von letzterem stammt auch die abstrakte Fragestellung in einem Spezialfall, welche als DIRICHLET-*Problem* bekannt geworden ist:

Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein Gebiet. Gibt es eine Funktion  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf  $\Omega$  zweimal stetig differenzierbar und auf dem Rand  $\partial\Omega$  stetig ist und

$$\Delta u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = f(x)$$

mit einer vorgegebenen stetigen Funktion  $f$  auf  $\partial\Omega$  erfüllt? Ist die Lösung eindeutig? Und vor allem: wie sieht die Funktion  $u$  aus?

DIRICHLETs Originalbeweis enthielt einen Fehler, der erst um 1900 von DAVID HILBERT (1862 – 1943) ausgebügelt wurde. Seine Lösungsansätze wirkten jedoch außerordentlich befruchtend auf andere Mathematiker.



Der allgemeine Lösungsansatz für eine schwingende Membran (der Einfachheit halber in zwei Dimensionen) führt dagegen über die HELMHOLTZ-Gleichung:<sup>7</sup> Ausgehend von

$$\Delta u = u_{tt} \quad \text{und} \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

einer Membran, die am Rand fest eingespannt ist, erhalten wir über den Separationsansatz  $u(x, y, t) = v(x, y)w(t)$

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\ddot{w}}{w} =: -\lambda,$$

was äquivalent zur HELMHOLTZ-Gleichung  $\Delta v + \lambda v = 0$  mit der Randbedingung  $v(x, y) = 0$  auf  $\partial\Omega$  ist. Wir sind hier also auf ein Eigenwertproblem gestoßen. Man fand heraus, dass es abzählbar unendlich viele Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  gibt und dass die zugehörigen Eigenfunktionen  $v_1, v_2, \dots$  paarweise orthogonal zueinander stehen und im Raum  $L^2(\Omega)$ , dem Raum der über  $\Omega$  quadratisch integrierbaren Funktionen, ein vollständiges Orthogonalsystem bilden.

WEYL untersuchte 1912<sup>8</sup> als erster systematisch die Abhängigkeit der Eigenwerte vom Rand des Gebiets und stellte eine Formel für deren Berechnung auf.

Im weiteren Verlauf des 20. Jahrhunderts wurden diese Untersuchungen auf RIEMANNsche Mannigfaltigkeiten ausgeweitet, für die auch ein LAPLACEoperator definiert werden kann. Während die Problemstellung, die Eigenschwingungen als Grundbestandteile der Schwingung der Membran aus ihrer Form abzuleiten, gut verstanden war, stellte MARK KAC (1914 – 1984) im Jahre 1966 die umgekehrte Frage: „*Can One Hear the Shape of a drum?*“ Diese Frage wurde erst 1992 zweifelsfrei mit „im Allgemeinen: Nein“ und 2000 mit „in Spezialfällen: Ja“ ( $\Omega$  konvex,  $\partial\Omega$  analytisch) beantwortet.

---

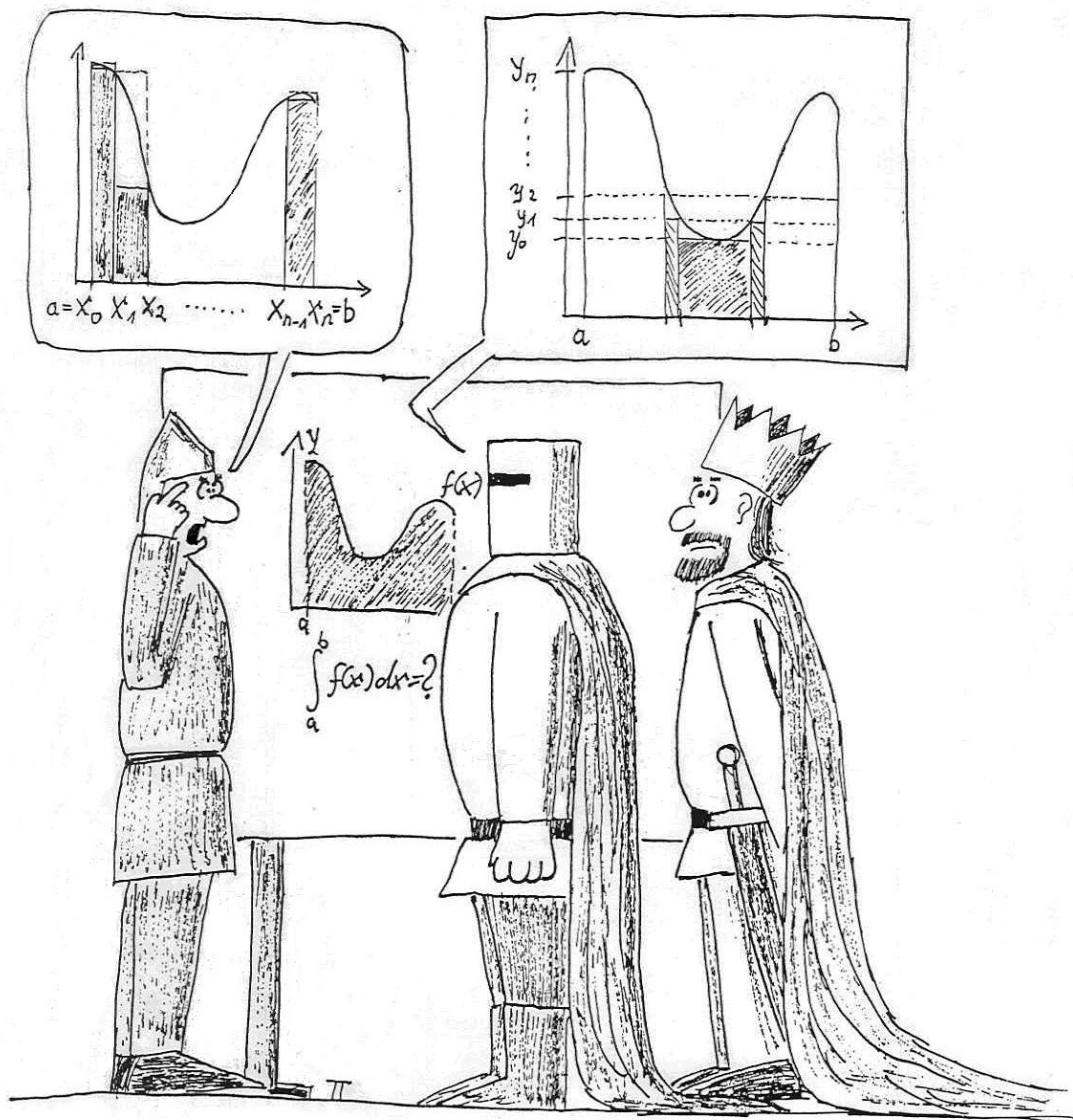
<sup>7</sup>HERMANN LUDWIG FERDINAND VON HELMHOLTZ, 1821 – 1894

<sup>8</sup>Journal für die reine und angewandte Mathematik, Nr. 141 (1912), S. 1 – 11

Pehrlich-Productions (π) present:

## Geschichten aus der Geschichte

Die Ritter der Tafelrunde auf der Suche nach dem heiligen Integral



# 1 Handwerkszeug

Das Ziel der Vorlesung ist eine Einführung in die FOURIERanalyse. Wenn man diese Disziplin nach modernen Gesichtspunkten unterrichtet, kommt man nicht daran vorbei, auch die Standpunkte und Methoden zu vermitteln, die sich erst im 20. Jahrhundert entwickelt haben.

Dieses Kapitel behandelt die notwendigen Vorkenntnisse, die wir haben müssen, um den Stoff verstehen zu können. Dabei ist es zwar durchaus möglich, auf das LEBESGUE-Integral zu verzichten – ELIAS M. STEIN und RAMI SHAKARCHI tun dies in ihrem Buch [ShaSte2003a] –, jedoch verzichtet man auf diese Weise auf ein großes Arsenal mächtiger Werkzeuge.

Diese Vorlesung wird sich daher zunächst ein wenig Zeit nehmen, den LEBESGUESchen Integralbegriff und sich die daraus ergebenden  $L^p$ -Räume vorzustellen. Auf Beweise, die meist technisch aufwendig sind, aber selten mehr als geometrisches Verständnis erfordern, wird verzichtet; stattdessen werden die interessierten Leser eingeladen, die Details in [Jones1993], [Be1976] oder dem „Klassiker“ [WhZyg1977] nachzulesen.

## 1.1 Das Lebesgue-Integral

### 1.1.1 Die Philosophie des Maßintegrals

Als RIEMANN 1854 in seiner Habilitationsschrift das nach ihm benannte Integral einführte, war dies die modernste Definition des Integrals, die die vorherigen Definitionen von CAUCHY,<sup>1</sup> EULER, bis zurück zu LEBNIZ<sup>2</sup> auf ein sauberes Fundament stellte. Allerdings offenbarte das RIEMANNsche Integral im Laufe der folgenden fünf Jahrzehnte einige Schwachpunkte, die in erster Linie damit zusammenhängen, dass in der Mengenlehre die ersten Objekte auftraten, die wir heute als *Fraktale* kennen.

1. Anhand solcher Mengen wurde beispielsweise demonstriert, dass der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung verloren gehen kann. Ein Beispiel solcher einer Funktion gab VITO VOLTERRA (1860 – 1940) im Jahr 1881, noch vor seiner Promotion.

---

<sup>1</sup>AUGUSTIN LOUIS CAUCHY, später zum Baron geadelt, 1789 – 1857

<sup>2</sup>GOTTFRIED WILHELM FREIHERR VON LEIBNIZ, 1646 – 1716

2. Die bewusste Vertauschung von Integration einerseits und Bilden eines Grenzwerts einer Funktionenfolge andererseits, spätestens seit WEIERSTRASS<sup>3</sup> regelmäßiger Bestandteil der Analysis, vorher einfach ohne Bedenken angewandt, führte zu unliebsamen Ergebnissen und wurde darum nur unter ziemlich strengen Auflagen betrachtet.
3. Das RIEMANN-Integral ist a priori nur für beschränkte Mengen und beschränkte Funktionen definiert. Integrale über ein unbeschränktes Intervall liefen wieder auf die Vertauschung von Grenzwerten hinaus, weil streng genommen eine Funktionenfolge integriert und der Grenzwert „ins Integral gezogen“ wurde:

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[a, R]} f(x) \cdot \mathbf{1}_{[a, R]} dx.$$

4. Den Geburtsfehler, die DIRICHLET-Funktion  $\mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$  nicht integrieren zu können, wurde das RIEMANN-Integral überdies nie los.

All dies sollte mit einem neuen Integral behoben werden, welches LEBESGUE, auf Vorarbeiten von ÉMILE BOREL<sup>4</sup> aufbauend, im Jahr 1902 einführte.

Die Philosophie dieses Integrals wird am ehesten deutlich, wenn man es dem RIEMANNschen gegenüberstellt. Dabei seien  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte und hinreichend stetige Funktion.

Um ein RIEMANN-Integral zu berechnen, unterteilt man das Intervall  $[a, b]$  in endlich viele Teilintervalle:  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Man sucht aus dem (offenen) Intervall  $(x_{i-1}, x_i)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) einen Punkt  $\xi_i$  als „Stützstelle“ und summiert die Rechtecke  $\xi_i \cdot (x_i - x_{i-1})$ . Das Integral ist dann der Grenzwert

$$\text{R-} \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \xi_i (x_i - x_{i-1}).$$

Das LEBESGUE-Integral dreht die Sichtweise um: Wir unterteilen die  $y$ -Achse in  $n$  Teilintervalle  $y_0 < y_1 < \dots < y_n$  (wobei wir zusehen sollten, dass der Wertebereich von  $f$  über  $[a, b]$  in dem Intervall  $[y_0, y_n]$  liegt). Dann summieren wir die Rechtecke

$$y_i \cdot \mu(\{x \in [a, b]; y_{i-1} \leq f(x) < y_i\}) \quad (1 \leq i \leq n),$$

wobei  $\mu$  ein Maß für eine Teilmenge von  $[a, b]$  ist, das wir im Folgenden noch zu definieren haben. Das Integral ist der Grenzwert der Summe

$$\text{L-} \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n y_i \cdot \mu(\{x \in [a, b]; y_{i-1} \leq f(x) < y_i\}).$$

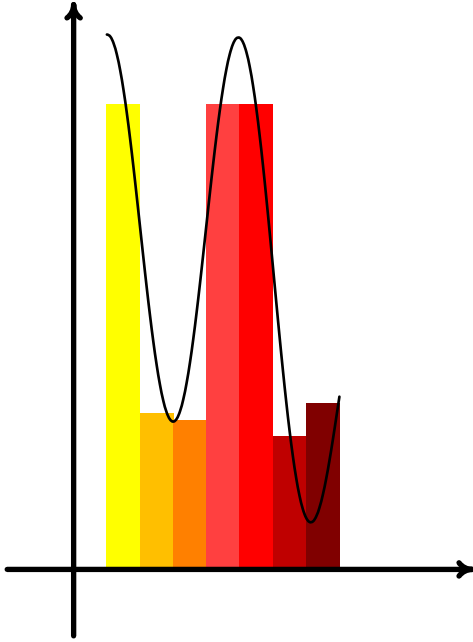


Abbildung 1.1: Die Philosophie hinter dem RIEMANN-Integral

Alternativ können wir auch statt des eindimensionalen Maßes  $\mu$  das zweidimensionale Maß  $\mu_2$  zu Rate ziehen und das Integral als Maß der Ordinatenmenge von  $f$  definieren:

$$\int_{[a,b]} f(x) dx := \mu_2(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq f(x), x \in [a, b]\}) - \mu_2(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x) \leq y \leq 0, x \in [a, b]\})$$

Von dem L-Integral erwarten wir naheliegenderweise die folgenden Eigenschaften:

- „Kompatibilität“ zum R-Integral, d. h. jede R-integrierbare Funktion soll auch L-integrierbar sein, und vor allem sollen die Integrale übereinstimmen;
- das L-Integral soll auch für Funktionen definiert sein, bei denen das R-Integral versagt (insbesondere bei dem alten Ärgernis namens DIRICHLET-Funktion);
- das L-Integral soll weniger scharfe Anforderungen an eine Funktionenfolge  $\{f_n\}_n$  stellen, damit Integration und Grenzwert der Funktionenfolge vertauscht werden können;
- das L-Integral soll keine Ansprüche an die Beschränktheit des Integrationsbereichs oder der Funktion  $f$  stellen. Man muss allenfalls damit rechnen, dass das Integral einer solchen Funktion unendlich wird.

<sup>3</sup>KARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS, 1815 – 1897

<sup>4</sup>FÉLIX ÉDOUARD JUSTIN ÉMILE BOREL (1871 – 1956)

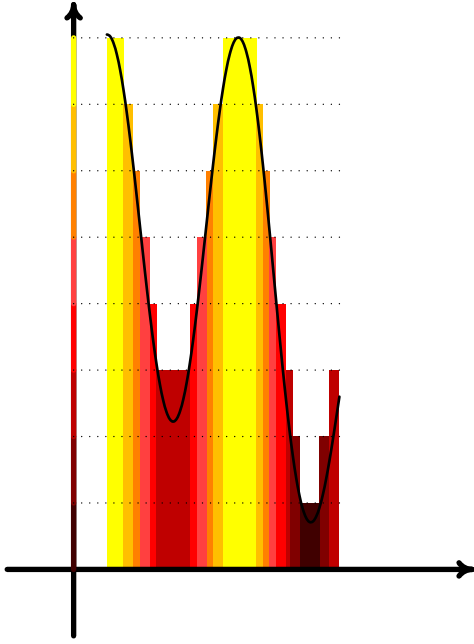


Abbildung 1.2: Die Philosophie hinter dem LEBESGUE-Integral. Gleiche Farben deuten an, dass diese Rechtecke zu derselben Menge  $\{x; y_{i-1} \leq f(x) \leq y_i\}$  gehören.

Wir werden weiter unten zeigen, dass das LEBESGUESCHE Integral dies tatsächlich weitgehend<sup>5</sup> leistet. Zunächst müssen wir uns aber Gedanken über das Maß  $\mu$  machen, das in der Formel für das L-Integral auftritt.

Geschichtlich geht das Maß auf BOREL zurück, der in den 1890ern bei Untersuchungen zur Funktionentheorie auf Mengen stieß, die mit den bis dahin vorhandenen Mitteln eines endlich additiven Maßes nicht zu messen waren. BOREL versuchte den Inhalt von solchen Mengen auf neue Weise zu messen und verfolgte in etwa folgenden Gedankengang:

1. Jede offene Menge  $G$  ist abzählbare Vereinigung von Intervallen, sprich achsenparallelen Quadern  $I_n$ . Der Inhalt von  $G$  ist demnach  $\sum_n |I_n|$ .
2. Ist  $F$  abgeschlossen, so ist  $F^c$  offen, also auch Vereinigung von Intervallen. Ist  $F$  beschränkt, kann man eine offene Menge  $G \supset F$  finden und das Maß von  $F$  definieren als  $\mu(G) - \mu(G \setminus F)$ .
3. Jede Menge, die man durch abzählbare Vereinigung oder Durchschnittsbildung auf

---

<sup>5</sup>Auch das LEBESGUE-Integral stößt an seine Grenzen, nämlich dann, wenn die zugrundeliegenden Mengen nicht messbar sind. – Andererseits steht die Existenz nicht-messbarer Mengen auf dem umstrittenen Fundament des Auswahlaxioms.

diese Weise gewinnen kann, kann induktiv wieder als Summe von Intervallen angesehen werden.

4. Dem Einheitswürfel ordnen wir das elementargeometrische Maß 1 zu.

Jede Menge, die wir auf diese Weise erhalten können, nennen wir BORELMenge. Ihre Gesamtheit  $\mathfrak{B}$  bildet eine sogenannte  $\sigma$ -Algebra, d. h. ein Teilsystem der Potenzmenge von  $\mathbb{R}^d$  mit den Eigenschaften

1. Die leere Menge  $\emptyset \in \mathfrak{B}$ .
2. Ist  $B \in \mathfrak{B}$ , dann auch  $B^c \in \mathfrak{B}$ .
3.  $\mathfrak{B}$  ist abgeschlossen unter abzählbarer Vereinigung.

LEBESGUE versuchte, durch VOLTERRAS Funktion inspiriert, einen Integralbegriff zu finden, der über das RIEMANN-Integral hinausging und die VOLTERRA-Funktion behandeln konnte. LEBESGUE hörte während seines Studiums Vorlesungen bei BOREL und ließ sich von dessen Gedanken eines abzählbaren Maßes leiten. Sein Zugang zur Messbarkeit geht jedoch über BORELS Ergebnisse heraus.

### 1.1.2 Das Lebesguesche Maß

Das Maß  $\mu$  dient dazu, einer Teilmenge von  $\mathbb{R}$  oder allgemein  $\mathbb{R}^d$  einen Inhalt zuzuordnen. Dabei stellen wir folgende naheliegende Anforderungen an  $\mu$ :

- (M1) „Abwärtskompatibilität“:  $\mu$  soll elementargeometrischen Mengen (etwa Kreisen, Dreiecken, Rechtecken) ihren elementargeometrischen Inhalt zuordnen, insbesondere einem achsparallelen Quader (einem „Intervall“)  $Q = [x_1, y_1] \times \cdots \times [x_d, y_d]$  den Inhalt  $|Q| := (y_1 - x_1) \cdots (y_d - x_d)$ .
- (M2)  $\mu$  soll „ $\sigma$ -additiv“ sein, d. h. sind  $E_1, E_2, \dots$  paarweise disjunkte Mengen, so soll

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

gelten. Bei Intervallen wollen wir der Bequemlichkeit halber etwas großzügiger sein und für die  $\sigma$ -Additivität nur verlangen, dass sie sich paarweise nicht überlappen, also keine inneren Punkte gemeinsam haben.

- (M3)  $\mu$  soll „translationsinvariant“ sein, d. h. wenn wir die Menge  $E$  um einen Vektor  $a$  verschieben, also  $E + a := \{x \in \mathbb{R}^d; x - a \in E\}$  bilden, soll  $\mu(E + a) = \mu(E)$  gelten.

Ausgangspunkt bei unserer Konstruktion des LEBESGUEmaßes (das wir, um es von anderen Maßen zu unterscheiden, mit  $\lambda$  bezeichnen werden) ist das *äußere Maß*  $\lambda^*$  einer Menge, das wir wie folgt definieren:

**Definition 1.1.1** Sei  $S$  eine abzählbare Menge von offenen Intervallen  $I_k$ , so dass  $E$  von diesen Intervallen überdeckt wird, also  $E \subset \bigcup_k I_k$ . Wir setzen zunächst

$$\sigma(S) := \sum_{I_k \in S} |I_k|.$$

Das äußere Maß von  $E$  wird dann definiert durch

$$\lambda^*(E) := \inf \sigma(S),$$

wobei das Infimum über alle möglichen abzählbaren Intervall-Überdeckungen  $S$  von  $E$  genommen wird.

Insgesamt machen wir uns vor allem einen Sachverhalt zunutze:

**Lemma 1.1.2** Ist  $G \subset \mathbb{R}^d$  eine offene Menge, so lässt  $G$  sich als abzählbare Vereinigung von paarweise nicht-überlappenden Intervallen schreiben.

Indem wir fordern, dass die überdeckende Menge offen ist, erreichen wir für eine abzählbare Vereinigung folgendes: Sind  $E_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) die zu überdeckenden Mengen und  $G_i \supset E_i$  die jeweiligen offenen Überdeckungen, dann ist  $\bigcup_i G_i$  auch wieder offen, kann also insbesondere wieder als Vereinigung von Intervallen angesehen werden.

Wir erhalten sofort einige elementare Eigenschaften des äußeren Maßes:

**Satz 1.1.3** 1. Es sei  $I$  ein Intervall. Dann gilt  $\lambda^*(I) = |I|$ .

2. Ist  $I = I_1 \cup \dots \cup I_n$  eine endliche Vereinigung paarweise nicht überlappender Intervalle, dann ist  $\lambda^*(I) = |I| = \sum_{k=1}^n |I_k| = \sum_{k=1}^n \lambda^*(I_k)$

3.  $\lambda^*(\partial I) = 0$ .

4. Das äußere Maß ist zumindest subadditiv, d. h.

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \implies \lambda^*(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^*(E_k).$$

$\sigma$ -Additivität erreichen wir für das äußere Maß nicht, wie wir später sehen werden, sondern nur die Subadditivität. Dafür ist zumindest das äußere Maß für jede Teilmenge von  $\mathbb{R}^d$  definiert.



Besonderes Augenmerk schenken wir der Klasse von „Nullmengen“, d. h. Mengen vom äußeren Maß 0.

Bildlich gesprochen sind diese Mengen so dünn, dass sie auf ein beliebig kleines Intervall zusammengeschoben werden können.

**Beispiel 1.1.4** Die rationalen Zahlen in  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  bilden eine Nullmenge.

**Beweis:** Wir wählen  $\varepsilon > 0$ . Sei  $q_1, q_2, \dots$  eine Aufzählung der rationalen Zahlen in  $[0, 1]$ . Für jedes  $n$  legen wir um  $q_n$  das offene Intervall  $(q_n - \varepsilon/2^{n+1}, q_n + \varepsilon/2^{n+1})$ , also das Intervall mit der Länge  $\varepsilon/2^n$ . Die Längensumme von  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$  ist also kleiner oder gleich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

□

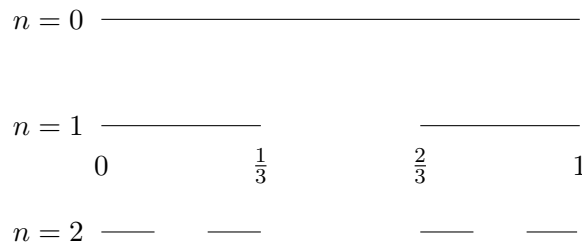
Mit diesem  $\varepsilon/2^n$ -Trick kann man auch zeigen, dass jede abzählbare Vereinigung von Nullmengen auch wieder eine Nullmenge ist – ohne auf die  $\sigma$ -Additivität eines Maßes zurückgreifen zu müssen.

Man könnte nun meinen, dass jede Nullmenge automatisch abzählbar sein muss, aber das stimmt nicht, wie uns das Beispiel der CANTORMENGE<sup>6</sup> zeigt.

**Beispiel 1.1.5** Wir definieren diese Menge als den „Grenzwert“ der folgenden Mengenoperation:  $C_0 := [0, 1]$ .

$C_{n+1}$  entstehe aus  $C_n$ , indem von jedem Teilintervall von  $C_n$  das offene mittlere Drittel entfernt wird.

Wir setzen  $C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$



Das äußere Maß der „ausgeräumten“ Menge ist

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{2}{3} \right)^i + 1 \right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} - 1 \right) = 1$$

Übrig bleibt die Menge aller Zahlen mit der triadischen Entwicklung  $0, a_1 a_2 a_3 \dots$ ,  $a_i \in \{0, 2\}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Diese Menge ist bijektiv abbildbar auf die Menge aller dyadischen Entwicklungen der Zahlen in  $[0, 1]$ , also auf  $[0, 1]$ , und damit überabzählbar.

<sup>6</sup>GEORG FERDINAND LUDWIG PHILIPP CANTOR, 1845 – 1918

Um aus dem äußeren Maß einer Menge  $E$  das LEBESGUE-Maß zu bilden, haben wir zwei zueinander äquivalente Möglichkeiten:

1. Der LEBESGUESche Zugang: Wir definieren analog zu einer minimalen offenen Überdeckung von  $E$  eine maximale Ausschöpfung mit offenen Mengen  $F_k$  und nennen deren Inhalt – der auch für die Mengen  $F_k$  als Vereinigung von Intervallen berechnet werden kann – das *innere Maß* von  $E$ .  $E$  ist dann messbar, wenn inneres und äußeres Maß übereinstimmen. Da diese Definition nur sinnvoll ist, wenn  $\lambda^*(E) < \infty$ , greifen wir auf eine alternative Formulierung zurück, die ohne diese Einschränkung auskommt:

$E$  ist dann und nur dann messbar, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine offene Überdeckung  $G \supset E$  gibt mit  $\lambda^*(G \setminus E) < \varepsilon$ .

2. CARATHÉODORYS<sup>7</sup> Charakterisierung:  $E$  ist genau dann messbar, wenn für jede Menge  $A \subset \mathbb{R}^d$  gilt

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \setminus E).$$

Falls  $E$  messbar ist, wird das äußere Maß von  $E$  auch das LEBESGUE-Maß von  $E$  genannt.

**Beispiel 1.1.6** *Beispiele für messbare Mengen:*

1. *Jede offene Menge  $G$  ist messbar. Der Beweis ist trivial:  $G$  überdeckt sich selbst, und  $\lambda^*(G \setminus G) = \lambda^*(\emptyset) = 0$ .*
2. *Jede Nullmenge ist messbar.*

**Beweis:**  $\lambda^*(E) = 0$  bedeutet, dass es eine offene Überdeckung  $G \supset E$  gibt mit  $\lambda^*(G) < \varepsilon$ . Es folgt

$$\lambda^*(G \setminus E) \leq \lambda^*(G) < \varepsilon.$$

□

**Bemerkung 1.1.7** Die Nullmengen sind gerade das, worin sich die LEBESGUE-Messbarkeit von der BOREL-Messbarkeit unterscheidet. Sind  $B_1 \subset B_2$  BORELMengen, mit  $\lambda(B_1) = \lambda(B_2)$  dann ist nach LEBESGUE auch jede Menge  $E$  „zwischen“ ihnen,  $B_1 \subset E \subset B_2$ , messbar mit  $\lambda(E) = \lambda(B_2)$ .

---

<sup>7</sup>CONSTANTIN CARATHÉODORY, 1873 - 1950

Nachdem LEBESGUE die ersten Arbeiten über das von ihm entwickelte Maß publiziert hatte, stellte er 1904 die Frage, ob jede Teilmenge von  $\mathbb{R}$  messbar sei.<sup>8</sup> Ein Jahr darauf wurde diese Frage von GIUSEPPE VITALI (1875 – 1932) negativ beantwortet.<sup>9</sup> VITALIS Beispiel wurde später auf  $\mathbb{R}^d$  erweitert.

Obwohl wir in diesem Kapitel auf Beweise weitgehend verzichten wollen, gönnen wir uns dennoch eine detaillierte Betrachtung der VITALI-Menge.

Die Grundidee ist folgende:

Wir definieren in  $[0, 1]$  zwei reelle Zahlen als äquivalent, wenn ihre Differenz rational ist:

$$x \sim y : \longrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Wie man sich leicht klar macht, wird durch  $\sim$  eine Äquivalenzrelation definiert, und wie bei solchen üblich, sind zwei Äquivalenzklassen entweder identisch oder disjunkt. Aus jeder Äquivalenzklasse wählen wir mittels des Auswahlaxioms genau einen Vertreter aus und nennen die Menge aller Vertreter  $V$ .

**Behauptung:**  $V$  ist nicht LEBESGUE-messbar.

**Beweis:** Wir werden

$$\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (V + r)$$

betrachten und die Annahme,  $V$  sei messbar, zu einem Widerspruch zu den Eigenschaften des LEBESGUE-Maßes  $\lambda$  führen.

( $\alpha$ ): Es gilt:  $(V + r) \cap (V + s) = \emptyset$  für  $r \neq s$ . Ansonsten wäre für ein  $\xi \in (V + r) \cap (V + s)$ :

$$\xi - r \in V \text{ und } \xi - s = \xi - r + \underbrace{(r - s)}_{\in \mathbb{Q}} \in V,$$

im Widerspruch dazu, dass  $V$  genau ein Element aus der Äquivalenzklasse  $[\xi]$  enthält.

( $\beta$ ): Es ist  $\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (V + r) \subset [-1, 2]$ . Dies ist offensichtlich, denn alle Vertreter  $[\xi]$  liegen in  $[0, 1]$ , und zu ihnen wird höchstens ein Wert vom Betrag 1 addiert.

( $\gamma$ ): Es gilt  $[0, 1] \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (V + r)$ . Dazu sei  $x \in [0, 1]$  beliebig. Zu  $x$  gibt es in  $V$  genau einen Vertreter  $[\xi]$ , so dass  $x = \xi + s$  mit geeignetem  $s \in \mathbb{Q}$  ist. Offenbar ist  $|s| \leq 1$ . Dann ist  $x \in V + s$  und also in der Vereinigung  $\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (V + r)$ .

( $\delta$ ): Nehmen wir an,  $V$  wäre messbar. Dann wäre  $\lambda(V + r) = \lambda(V)$  für alle  $r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ . Wäre  $V$  eine Nullmenge, dann wäre auch  $\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (V + r)$  eine Nullmenge, im Widerspruch zu ( $\gamma$ ), denn hier muß die Vereinigung aller  $(V + r)$  mindestens das Maß 1

<sup>8</sup>*Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.* Gauthier-Villars, Paris 1904

<sup>9</sup>*Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta.* in: G. VITALI, *Opere sull'analisi reale e complessa* - Carteggio, Unione Matematica Italiana, Bologna, 1984

haben. Wäre dagegen  $\lambda(V) > 0$ , so wäre wegen der  $\sigma$ -Additivität und weil die Mengen alle paarweise disjunkt sind,

$$\lambda\left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (V+r)\right) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \lambda(V+r) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \lambda(V) = \infty,$$

im Widerspruch zu  $(\beta)$ , denn dort haben wir gezeigt, dass die Vereinigung der Mengen  $V+r$  beschränkt ist und höchstens das Maß 3 haben kann.  $\square$

### 1.1.3 Messbare Funktionen und das Integral von Treppenfunktionen

Rufen wir uns noch einmal der Begriff der LEBESGUESchen Summe in Erinnerung:

$$\sum_{k=1}^n y_k \cdot \lambda(\{x; y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}).$$

Damit diese Summanden wohldefiniert sind, müssen wir fordern, dass die Mengen  $\{x; y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}$  für beliebige Stützstellen  $y_{k-1}$  und  $y_k$  messbar sind.

Wir definieren daher:

**Definition 1.1.8**  $f : E \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty]$  wird LEBESGUE-messbar (auf  $E$ ) genannt, falls für jedes  $\alpha \in \mathbb{R}$  die Menge  $\{x \in E; f(x) > \alpha\}$  eine messbare Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$  ist. Wir schreiben für diese Menge kurz  $\{f > \alpha\}$ .

Eine besonders nützliche Charakterisierung messbarer Funktionen findet sich in folgendem

**Satz 1.1.9** Ist  $E \subset \mathbb{R}^d$  messbar, dann ist  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann messbar, wenn für jede offene Teilmenge  $G \subset \mathbb{R}$  die Menge  $f^{-1}(G)$  in  $\mathbb{R}^d$  messbar ist.

Weitere wichtige Eigenschaften messbarer Funktionen sind:

1. Die messbaren und fast überall<sup>10</sup> definierten Funktionen bilden einen reellen Vektorraum.
2. Sind  $f, g$  messbar, dann ist auch  $f \cdot g$  messbar; ist darüber hinaus  $g$  fast über von 0 verschieden, ist auch  $f/g$  messbar.
3. Ist  $\{f_n\}_n$  eine Folge messbarer Funktionen, dann sind auch die (punktweise definierten)  $\inf_n f_n$ ,  $\sup_n f_n$ ,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$  und  $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$  messbar. Insbesondere ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  messbar, wenn der Grenzwert existiert.

---

<sup>10</sup>überall bis auf eine Nullmenge

4. Ist  $f$  messbar, dann auch  $f^+(x) := \max\{f(x), 0\}$  und  $f^-(x) := \max\{0, -f(x)\}$ .

Dass die Messbarkeit insbesondere mit der Grenzwertbildung verträglich ist, kommt uns nun zugute, wenn wir messbare Funktionen durch Treppenfunktionen approximieren. Dazu nehmen wir Funktionen der folgenden Gestalt:

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{E_i},$$

wobei  $E = \bigsqcup_{i=1}^n E_i$  mit paarweise disjunkten Mengen  $E_i$  ist und  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  paarweise verschieden sind. In diesem Fall liegt es nahe, das Integral von  $f$  zu definieren als

$$\int_E f \, dx := \sum_{i=1}^n a_i \lambda(E_i),$$

vorausgesetzt, dass die Mengen  $E_i$  messbar sind.

Solche Funktionen nennen wir *einfache* Funktionen.

**Satz 1.1.10** 1. Jede Funktion  $f$  ist (punktweiser) Grenzwert einer Folge einfacher Funktionen  $\{f_n\}$ .

2. Falls  $f > 0$ , so können die Funktionen  $f_n$  so gewählt werden, dass  $f_n \leq f_{n+1}$  für alle  $n$ .

3. Falls  $f$  in 1 oder 2 messbar ist, so kann man die  $f_n$  ebenfalls messbar wählen.

Mit dieser Aussage haben wir das notwendige Rüstzeug, um das Integral einer messbaren Funktion zu definieren.

Dazu fassen wir das Integral zunächst einmal abstrakt als das  $(d+1)$ -dimensionale Maß der Menge

$$R(f, E) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{d+1}; x \in E, 0 \leq y \leq f(x) < \infty\}$$

auf:

**Definition 1.1.11** Das LEBESGUE-Integral der messbaren Funktion  $f$  mit  $f(x) \geq 0$  über der messbaren Menge  $E$  wird definiert als  $\lambda_{d+1}(R(f, E))$  und bezeichnet mit

$$\begin{aligned} \lambda_{(d+1)}(R(f, E)) &= \int_E f(x) \, dx =: \int_E f \, dx =: \int_E f =: \int f \\ &= \int \cdots \int_E f(x_1, \dots, x_d) \, dx_1 \cdots dx_d \end{aligned}$$

**Satz 1.1.12** Sei  $E$  messbar und  $f : E \rightarrow [0, \infty]$ . Dann existiert  $\int_E f$  (d.h.  $R(f, E)$  ist messbar), wenn  $f$  messbar ist.

Wohlgermerkt sagt dieser Satz nur etwas über die Messbarkeit der Menge  $R(f, E)$  aus, aber nichts darüber, ob diese Menge endliches Maß hat.

Als Folgerung erhalten wir die Monotonie des Integrals für nichtnegative messbare Funktionen:

1.  $f$  und  $g$  seien messbar, und gelte  $0 \leq g \leq f$  auf  $E$ . Dann ist

$$\int_E g \leq \int_E f \quad \text{und speziell} \quad \int_E \inf f \leq \int_E f.$$

2.  $E_1, E_2$  seien messbar mit  $E_1 \subset E_2$ , und  $f$  sei nicht negativ und messbar auf  $E_2$ . Dann gilt:

$$\int_{E_1} f \leq \int_{E_2} f.$$

### 1.1.4 Konvergenzsätze für nichtnegative Funktionen

Zunächst ist das Integral also nur für  $f \geq 0$  definiert, und  $\int_E f = +\infty$  ist sehr wohl möglich.

Für nichtnegative Funktionen erhalten wir im Gegenzug jedoch die folgenden wertvollen Ergebnisse:

**Satz 1.1.13 (Satz von der monotonen Konvergenz)**  $\{f_n\}$  sei eine Folge nichtnegativer messbarer Funktionen mit  $f_n \uparrow f$  auf  $E$ . Dann gilt:

$$\int_E f_n \uparrow \int_E f \quad (\text{m. a. W.: } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n = \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n).$$

**Satz 1.1.14** Seien  $f, g \geq 0$  und messbar auf  $E$ , und gelte  $g \leq f$  fast überall auf  $E$ . Dann ist  $\int_E g \leq \int_E f$ .

Insbesondere: ist  $g = f$  fast überall auf  $E$ , dann ist  $\int_E g = \int_E f$ .

**Satz 1.1.15** Das Integral ist linear, d. h.

1. Gelte  $f \geq 0$  und messbar, und sei  $\mathbb{R} \ni c > 0$ . Dann ist

$$\int_E c \cdot f = c \cdot \int_E f.$$

2. Seien  $f, g \geq 0$  und messbar. Dann ist

$$\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g.$$

3. Seien  $f, \Phi$  messbar mit  $0 \leq f \leq \Phi$ , ferner sei  $\int_E f$  endlich. Dann gilt

$$\int_E (\Phi - f) = \int_E \Phi - \int_E f.$$

**Satz 1.1.16** Seien  $f_n \geq 0$  und messbar auf  $E$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Dann gilt

$$\int_E \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n.$$

Die letzte Aussage ist einfach zu beweisen, denn  $\{F_N\}$  mit  $F_N := \sum_{n=1}^N f_n$  ist eine monoton wachsende Folge. Daher gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \leftarrow \sum_{n=1}^N \int_E f_n = \int_E F_N \uparrow \int_E \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)$$

□

**Satz 1.1.17 (FATOU<sup>11</sup>)**  $\{f_n\}$  sei eine Folge nicht-negativer messbarer Funktionen auf  $E$ . Dann gilt

$$\int_E \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n.$$

Und schließlich der bedeutendste Satz für nichtnegative Funktionen:

**Satz 1.1.18 (LEBESGUE)**  $\{f_n\}$  sei eine Folge nicht-negativer messbarer Funktionen auf  $E$ .  $f_n \rightarrow f$  punktweise fast überall auf  $E$ . Ferner existiere eine messbare Funktion  $\Phi$  mit  $f_n \leq \Phi$  fast überall und für alle  $n$ ;  $\int_E \Phi$  sei endlich.

Dann konvergiert  $\int_E f_n \rightarrow \int_E f$ .

### 1.1.5 Das Integral für allgemeine messbare Funktionen

Wenn wir das Integral auch für Funktionen  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  verwenden möchten, greifen wir darauf zurück, dass wir  $f$  in  $f = f^+ - f^-$  zerlegen. Beide Funktionen  $f^+$  und  $f^-$  sind messbar, daher sind die Integrale  $\int_E f^+$  und  $\int_E f^-$  wohldefiniert. Falls eines der beiden Integrale endlich ist, ist auch die Definition

$$\int_E f := \int_E f^+ - \int_E f^-$$

durchaus sinnvoll. Den ungemütlichen Fall, dass wir „ $\infty - \infty$ “ rechnen müssen, haben wir somit elegant umschifft. Wir sagen dann wieder, dass das Integral von  $f$  existiere – was aber auch nicht impliziert, dass es endlich ist. Für diesen Fall führen wir den folgenden Begriff ein:

<sup>11</sup>PIERRE JOSEPH LOUIS FATOU, 1878 – 1929

**Definition 1.1.19** Falls  $\int_E f$  existiert und endlich ist, so nennen wir  $f$  (LEBESGUE)-integrierbar (auf  $E$ ).

$$L(E) := \left\{ f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ messbar; } \int_E f(x) dx \text{ existiert und ist endlich} \right\}.$$

Falls  $\int_E f$  existiert, so gilt:

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E f^+ + \int_E f^- = \int_E (f^+ + f^-) = \int_E |f|.$$

**Satz 1.1.20** Sei  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar. Dann ist  $f$  genau dann auf  $E$  integrierbar, wenn  $|f|$  auf  $E$  integrierbar ist.

Hierzu zwei Anmerkungen:

1. Die Voraussetzung der Messbarkeit von  $f$  ist notwendig. Ansonsten gäbe es das folgende Gegenbeispiel:

$A \subset \mathbb{R}$  sei nicht messbar, und  $f$  sei definiert als

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ -1 & x \notin A \end{cases}$$

Dann ist  $|f| \equiv 1$  messbar, aber  $f$  nicht (die Menge  $\{f > 0\}$  ist nicht messbar).

2. Die Funktion  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  ist auf  $[0, \infty)$  nicht L-integrierbar, denn  $\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty$ . Dies dürfte zunächst verwundern, denn diese Funktion ist ein Paradebeispiel für uneigentlich RIEMANN-integrierbare Funktionen.

**Satz 1.1.21** Das Integral für messbare Funktionen hat folgende Eigenschaften:

1. (Monotonie:)  $f, g$  seien messbar,  $\int_E f$  und  $\int_E g$  mögen existieren (Endlichkeit ist nicht vorausgesetzt). Ferner gelte  $f \leq g$  fast überall auf  $E$ . Dann gilt

$$(1.1) \quad \int_E f \leq \int_E g.$$

2. Sei  $E_1 \subset E$  messbar, und das Integral  $\int_E f$  existiere. Dann existiert auch  $\int_{E_1} f$ .
3.  $\int_E f$  existiere, und gelte  $E = \bigcup_n E_n$  mit messbaren Mengen  $E_1, E_2, \dots$ , paarweise disjunkt (oder nicht-überlappend), wobei die Ränder Nullmengen sind). Dann gilt

$$(1.2) \quad \int_E f = \sum_n \int_{E_n} f.$$



4. Sei  $f = 0$  fast überall auf  $E$  oder sei  $E$  eine Nullmenge. Dann ist

$$(1.3) \quad \int_E f = 0.$$

5.  $\int_E f$  existiere. Dann existiert für  $c \in \mathbb{R}$  das Integral  $\int_E (cf)$ , und es ist

$$(1.4) \quad \int_E (c \cdot f) = c \cdot \int_E f.$$

6. Seien  $f, g \in L(E)$ . Dann ist  $(f + g) \in L(E)$  und

$$(1.5) \quad \int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g.$$

Die Gleichungen (1.4) und (1.5) besagen nun nichts anderes, als dass  $L(E)$  ein reeller Vektorraum ist. Streng genommen ist dies der Raum  $L^1(E)$ , den wir später noch näher betrachten werden. Wenn man hofft, dass dieser Raum auch abgeschlossen ist unter punktweiser Multiplikation, wird man enttäuscht sein, denn es gibt ein Gegenbeispiel:

Sei  $E = [0, 1]$  und  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & , x = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & , 0 < x \leq 1 \end{cases} .$$

Diese Funktion ist messbar, denn sie ist stetig bis auf den Nullpunkt.

Um zu zeigen, dass das Integral von  $f$  existiert und endlich ist, definieren wir die Folge

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & , x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & , \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases} .$$

Dann konvergiert  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  punktweise fast überall, und es ist

$$\int_{[0,1]} f_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_{\frac{1}{n}}^1 = 2 - 2\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 2.$$

Aus dem Satz über die monotone Konvergenz folgt also

$$\int_{[0,1]} f(x) dx = 2$$

(als L-Integral wie als uneigentliches R-Integral).

Demgegenüber ist allerdings  $f(x) \cdot f(x) = \frac{1}{x}$ , und

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty.$$

Wir halten also fest: wenn  $f, g$  messbar sind und zusätzlich  $fg \in L(E)$  gelten soll, muss mindestens eine der beiden Funktionen zusätzliche Bedingungen erfüllen. Welche dies sind, beantwortet der folgende

**Satz 1.1.22** Sei  $f \in L(E)$ ,  $g$  sei messbar auf  $E$ , und es gebe eine Konstante  $M > 0$ , so dass  $|g| \leq M$  fast überall auf  $E$ .

Dann gilt  $(f \cdot g) \in L(E)$ .

Man beachte: hier wird nur vorausgesetzt, dass  $g$  messbar und beschränkt ist, Integrierbarkeit von  $g$  ist nicht notwendig; offensichtlich ist nämlich  $\mathbf{1}_E$  nicht integrierbar, wenn  $\lambda(E) = \infty$ , aber  $\int_E f = \int_E f \cdot \mathbf{1}_E$  ist endlich für  $f \in L(E)$ .

### 1.1.6 Konvergenzsätze für messbare Funktionen

Während wir oben die wesentlichen Konvergenzsätze schon für nichtnegative Funktionen betrachtet haben, verallgemeinern wir sie nun dahingehend, dass der Integrand nur noch messbar sein muss.

Grundsätzlich vollzieht man die Beweise, indem man eine messbare Funktion  $f$  in  $f^+$  und  $f^-$  zerlegt und auf diese die obigen Konvergenzsätze anwendet. Ist zusätzlich zu beachten, dass die Voraussetzung – im Unterschied zum Fall der nichtnegativen Funktionen – auch nur eine fast-überall-Konvergenz beinhaltet, behilft man sich damit, die Nullmenge  $\{x; f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}$  aus der Betrachtung herauszunehmen; die Integrale stören sich schließlich nicht an Nullmengen.

Beginnen wir mit dem folgenden

**Satz 1.1.23** Seien  $f_n \in L(E)$  für  $n = 1, 2, \dots$ .  $\{f_n\}$  konvergiere gleichmäßig auf  $E$  gegen  $f$ . Ferner gelte  $\lambda(E) < \infty$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n = \int_E f.$$

Dies ist auch eigentlich zu erwarten, da gleichmäßige Konvergenz eine deutlich stärkere Bedingung ist als nur punktweise Konvergenz. Ein Beweis der Aussage macht aber trotzdem Gebrauch von:

**Satz 1.1.24 (Monotone Konvergenz)**  $\{f_n\}$  sei eine Folge messbarer Funktionen auf  $E$ .

1. Falls  $f_n \uparrow f$  fast überall auf  $E$  und falls es ein  $\Phi \in L(E)$  gibt, so dass  $f_n \geq \Phi$  fast überall auf  $E$  für alle  $n$ , so gilt

$$\int_E f_n \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \int_E f.$$

2. Falls  $f_n \downarrow f$  fast überall auf  $E$  und es ein  $\Phi \in L(E)$  gibt, so dass  $f \leq \Phi$  fast überall auf  $E$  für alle  $n$ , so gilt

$$\int_E f_n \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \int_E f.$$

An dieser Stelle muss man im Beweis zusätzlich die Nullmengen  $\{f_n < \Phi\}$  für  $n = 1, 2, \dots$  ausklammern, aber auch diese Mengen sind nach Voraussetzung Nullmengen, ihre (abzählbare) Vereinigung also auch. Die Voraussetzung  $f_n \geq \Phi$  geht in den Beweis ein, damit  $f - \Phi \geq 0$  ist und wir Satz 1.1.13 verwenden können.

Dasselbe gilt für die beiden folgenden Sätze

**Satz 1.1.25 (Lemma von FATOU)**  $\{f_n\}$  sei eine Folge messbarer Funktionen auf  $E$ . Es existiere eine Funktion  $\Phi \in L(E)$  mit  $f_n \geq \Phi$  fast überall auf  $E$  für alle  $n$ . Dann gilt

$$\int_E (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n.$$

**Satz 1.1.26 (LEBESGUE; majorisierte Konvergenz)**  $\{f_n\}_n$  sei eine Folge messbarer Funktionen auf  $E$  mit  $f_n \rightarrow f$  fast überall auf  $E$ . Ferner existiere ein  $\Phi \in L(E)$  mit  $|f_n| \leq \Phi$  fast überall auf  $E$  und für alle  $n$ . Dann gilt

$$\int_E f_n \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \int_E f.$$

Bildlich stellt sich die majorisierte Konvergenz so dar, dass die Funktionenfolge  $\{f_n\}_n$  fast überall zwischen den beiden Funktionen  $-\Phi$  und  $\Phi$  verläuft.

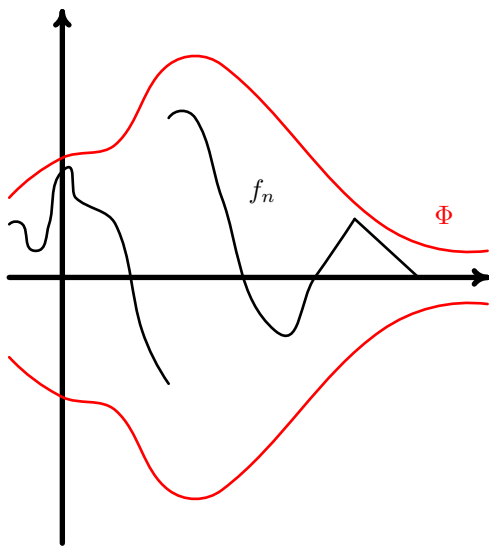


Abbildung 1.3: Skizze zum LEBESGUESchen Konvergenzsatz.

Zum Abschluss betrachten wir noch komplexwertige Funktionen. Wir werden diese noch bei der Betrachtung von  $L^p$ -Räumen brauchen.

Da wir auf den komplexen Zahlen keine sinnvollen Vergleichsoperationen zur Verfügung haben, definieren wir die Messbarkeit einer Funktion analog zu Satz 1.1.9:

**Bezeichnung:**  $f : E \rightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  wird messbar genannt, falls für alle offenen Teilmengen  $G \subset \mathbb{R}^2$  das Urbild  $f^{-1}(G)$  messbar ist.

Als Schreibweise verwenden wir  $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$  oder auch  $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ .

**Bemerkung 1.1.27**  $f$  ist genau dann messbar, wenn  $f_1$  und  $f_2$  messbar sind.

Man definiert daher das Integral von  $f$  durch

$$\int_E f := \int_E f_1 + i \int_E f_2.$$

$f$  wird integrierbar genannt, falls  $f$  messbar ist und  $\int_E |f| < \infty$ .

Das Integral hat dann die Eigenschaften:

1. Es ist komplex linear,
2.  $f = f_1 + if_2$  ist genau dann integrierbar, wenn  $f_1$  und  $f_2$  integrierbar sind, und es ist

$$(1.6) \quad \left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|.$$

## 1.2 $L^p$ -Räume

### 1.2.1 Geschichtliches

Den Raum  $L^1(E)$  haben wir als  $L(E)$  bereits kennengelernt und festgestellt, dass in diesem Raum gilt: wenn eine Funktionenfolge  $f_n$  gegen  $f$  konvergiert (die jeweiligen Einschränkungen vorausgesetzt), konvergieren auch die Integrale  $\int_E f_n$  gegen  $\int_E f$ . Dies hat zur Folge, dass die Mittelung

$$\int_E |f_n - f| \leq \int_E |f_n| - \int_E |f| \rightarrow 0$$

konvergiert.

Streng genommen waren Mittelungen dieser Art – wenn auch nur für endlich viele Werte – schon seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts bekannt. Am Neujahrstag 1801 entdeckte der italienische Astronom GIUSEPPE PIAZZI (1746 – 1826) den Asteroiden Ceres und konnte vierzig Nächte lang dessen Bahn verfolgen, ehe der Asteroid von der Sonne verdeckt wurde. Als kurz darauf die Suche nach Ceres wieder aufgenommen wurde, betrat der junge Wissenschaftler JOHANN CARL FRIEDRICH GAUSS (1777 – 1855) mit einem von ihm im Jahre 1795 entwickelten Verfahren, der *Methode der kleinsten Quadrate* die Bühne des Geschehens. GAUSS' Berechnungen ermöglichten es dem österreichischen Astronomen

FRANZ XAVER FREIHERR VON ZACH (1754 – 1832), den verloren geglaubten neuen Himmelskörper wieder aufzufinden. Damit hatte die neue Berechnungsmethode, aus einigen wenigen Daten eine Kurve zu rekonstruieren, ihre Feuertaufe bestanden.

Die Methode der kleinsten Quadrate lebt davon, durch eine Wolke von endlich vielen Messwerten  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  eine Funktion  $f$  so zu zeichnen, dass  $\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2$  minimal wird. Sie wurde zum wichtigsten Hilfsmittel bei der Fehler- und Ausgleichsrechnung, also der Frage, welchen Wert denn eine gemessene Größe haben soll, wenn unterschiedliche Messwerte für ein- und dasselbe Objekt gegeben sind.

Der Übergang  $n \rightarrow \infty$  wurde von HILBERT in seinen Vorlesungen und Veröffentlichungen über Integralgleichungen<sup>12</sup> und in erweiterter Form von ERHARD SCHMIDT (1876 – 1959) in dessen Dissertation<sup>13</sup> vollzogen.

Beide betrachteten unendliche Orthogonalsysteme und schufen die Grundlagen derjenigen Disziplin der Funktionalanalysis, die heute als HILBERTraumtheorie bekannt ist; allerdings wurde erst durch FRIGYES RIESZ<sup>14</sup> (1880 – 1956) und ERNST SIGISMUND FISCHER (1875 – 1954) zeitgleich im Jahr 1907 das Prinzip der *Konvergenz im quadratischen Mittel* als die natürliche Erweiterung der Methode der kleinsten Quadrate erkannt.<sup>15</sup> Das wichtigste Ergebnis von RIESZ und FISCHER ist der Satz, der nach beiden Autoren benannt ist:

Der Raum der zum Quadrat (LEBESGUE-)integrierbaren Funktionen ist mit der Norm

$$\|f\| := \sqrt{\int |f|^2 dx}$$

vollständig, d. h. jede CAUCHYfolge konvergiert.

Dieser Begriff wurde von F. RIESZ im Jahr drei Jahre später noch verallgemeinert.<sup>16</sup> Dieser Artikel ist auch die Geburtsstunde des Begriffs  $L^p$ .

---

<sup>12</sup> *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*. Vierte und fünfte Mitteilung, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse **1906**, S. 157 – 227, S. 439 – 476

<sup>13</sup> *Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen*, I und II. Abgedruckt in Math. Ann. **63** (1907), 433 – 476 und **64** (1907), 161 – 174

<sup>14</sup> Bei Publikationen in deutscher Sprache FRIEDRICH RIESZ, bei Publikationen in französischer Sprache FRÉDÉRIC RIESZ

<sup>15</sup> Dies waren insgesamt drei Artikel in C. R. Acad. Sci. Paris **144** (1907): *Sur les systèmes orthogonaux des fonctions* von F. RIESZ (S. 615 – 619) und *Sur la convergence en moyenne* (S. 1022 – 1024) sowie *Applications d'un théorème sur la convergence en moyenne* (S. 1148 – 1151) von FISCHER.

<sup>16</sup> *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen*. Math. Ann. **69** (1910), S. 449 – 497

1918 erschien von RIESZ eine Arbeit,<sup>17</sup> die bereits 1916 geschrieben wurde und in welcher implizit die Axiome des vollständigen normierten Raumes benutzt werden, ohne sie als solche zu kennzeichnen. Diese wurden erst 1922 von STEFAN BANACH (1892 – 1945) in seiner Dissertation<sup>18</sup> formuliert. Im selben Jahr erschien ein von NORBERT WIENER (1894 – 1964) geschriebener Artikel,<sup>19</sup> in welchem er unabhängig von BANACH die selben Axiome für normierte Räume herausarbeitet. Im Unterschied zu BANACH lässt WIENER aber auch Funktionenräume über den komplexen Zahlen zu.<sup>20</sup>

Während die Axiome für BANACHräume also schon 1922 feststanden, dauerte es noch fünf Jahre, ehe JOHN VON NEUMANN (1903 – 1957) auch die Axiome für abstrakte HILBERTräume formulierte.<sup>21</sup>

Ironie: Obwohl die Betrachtungen allgemeiner normierter Räume aus dem Spezialfall hervorgegangen sind, dass die Norm durch ein Skalarprodukt erzeugt wird, wird diese Axiomatisierung doch erst später vorgenommen.

### 1.2.2 Die Definition der Räume $L^p(E)$

Im Folgenden sei  $E \subset \mathbb{R}^d$  stets eine messbare Menge. Wir setzen nicht voraus, dass  $E$  beschränkt ist oder endliches Maß habe, außer dies wird explizit hervorgehoben.  $\mathbb{K}$  bezeichne den Körper der reellen oder komplexen Zahlen. Funktionen sind grundsätzlich über  $E$  definiert und  $\mathbb{K}$ -wertig.

Der Raum  $L^1(E)$  ist eigentlich der Raum  $L(E)$ , den wir im vorigen Abschnitt kennengelernt haben. Der einzige Unterschied, den wir machen, ist dass das Integral nun dazu benutzt wird, eine Norm auf diesem Raum zu definieren. Dies geschieht für  $L(E)$  wie auch für andere Räume

$$L^p(E) := \left\{ f : E \rightarrow \overline{\mathbb{C}}; \int_E |f|^p < \infty \right\} \quad (1 \leq p < \infty).$$

Diese  $L^p$ -Räume ergänzen wir noch um

$$L^\infty(E) := \left\{ f : e \rightarrow \overline{\mathbb{C}}; \operatorname{ess. \, sup}_{x \in E} |f(x)| < \infty \right\},$$

wobei  $\operatorname{ess. \, sup}$  andeuten soll, dass das Supremum auf einer Nullmenge auch gleich unendlich sein darf.

Rufen wir uns dazu nochmals die Definition einer Norm in Erinnerung. Eine Norm  $\|\cdot\|$  auf einem Vektorraum  $V$  über dem Körper  $\mathbb{K}$  dient dazu, die Länge eines Vektors zu messen. Wir fordern folgende Regeln:

<sup>17</sup>Über lineare Funktionalgleichungen. Acta Math. **41** (1918), 71 – 98

<sup>18</sup>Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. Fund. Math **3** (1922), 133 – 181

<sup>19</sup>Limit in terms of continuous transformation. Bulletin de la S. M. F., tome **50**, (1922), 119 – 134

<sup>20</sup>So etwa in „Note on a Paper of M. Banach“, Fund. Math. **4** (1923), 136 – 143.

<sup>21</sup>Mathematische Begründung der Quantenmechanik. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen **1927**, 1 – 57

(N1) Die Norm ist eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_+$  mit der zusätzlichen Bedingung  $\|v\| = 0 \iff v = 0$ .

(N2) Für jedes  $\alpha \in \mathbb{K}$  und jedes  $v \in V$  ist  $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$ .

(N3) Für alle  $v, w \in V$  ist  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ .

Die Ungleichung (N3) nennt man auch *Dreiecksungleichung*.

Die Axiome der Norm lernt man üblicherweise in den Grundvorlesungen zur Analysis als Vorbereitung auf die Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen kennen. Die natürlichen Normen des  $\mathbb{R}^d$  sind gegeben durch

$$\|x\|_p := \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_d|^p} \quad (1 \leq p < \infty)$$

und

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_d|\}$$

Der Fall  $p = 2$  stellt eine Besonderheit dar, denn diese Norm wird durch das Standardskalarprodukt  $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^d x_i y_i$  erzeugt. Im komplexen Fall ersetze man  $y_n$  jeweils durch  $\overline{y_n}$ .

HILBERT erweiterte in seinen Untersuchungen zu Integralgleichungen dieses Skalarprodukt auf abzählbar unendlich viele  $x_n$  und musste als Einschränkung fordern, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty,$$

damit dieses „unendliche Skalarprodukt“ wohldefiniert bleibt.

Die naheliegende Verallgemeinerung dieses Skalarproduktes von Zahlenfolgen auf Funktionen ist, statt einer Summe ein Integral zu verwenden:

$$(f, g) := \int_E f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Die hieraus entstehende Norm wäre – so sie denn die Axiome (N1) bis (N3) erfülle –

$$\|f\|_2 := \left( \int_E |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{allgemein:} \quad \|f\|_p := \left( \int_E |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

für  $1 \leq p < \infty$ .

Prüfen wir die Regeln einmal nach:

(N1) ist nur zum Teil erfüllt. Denn aus  $\|f\|_2 = 0$  folgt nicht, dass  $f \equiv 0$ , sondern nur, dass  $f(x) = 0$  für fast alle  $x \in E$  – da wir ein LEBESGUE-Integral verwenden, hat eine Änderung der Funktion auf einer Nullmenge in  $E$  keinen Einfluss auf das Integral.

(N2) ist offensichtlich erfüllt.

(N3) ist nicht ganz so leicht einzusehen, denn hierzu muss man erst einmal die HÖLDERSche<sup>22</sup> Ungleichung beweisen und daraus die MINKOWSKISCHE<sup>23</sup> Ungleichung herleiten

Zur HÖLDERSchen Ungleichung: Seien  $p, q \in (1, \infty)$  mit  $1/p + 1/q = 1$ , Dann gilt:

$$\int_E |f \cdot g| \leq \left( \int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_E |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Hieraus folgt die MINKOWSKISCHE Ungleichung

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Dank der MINKOWSKISchen Ungleichung erfüllt  $\|\cdot\|_p$  praktisch alle Eigenschaften einer Norm, bis auf die, dass aus  $\|f\|_p = 0$  auch  $f = 0$  folgt. Wir müssen uns daher mit folgendem Konstrukt behelfen:

Sei die Relation  $\sim$  definiert durch  $f \sim g : \iff f = g$  fast überall auf  $E$ . Wie man leicht verifiziert, ist  $\sim$  eine Äquivalenzrelation. Statt einer Funktion  $f$  selbst betrachten wir fortan nur noch ihre Äquivalenzklasse  $[f]$  bezüglich  $\sim$ . Es hat sich die etwas unsaubere Schreibweise eingebürgert, wiederum  $f$  statt  $[f]$  und  $L^p(E)$  statt  $L^p(E)/\sim$  zu schreiben. Auch wir werden ausgiebig Gebrauch davon machen. Wir werden salopp von „der Funktion  $f \in L^p(E)$ “ sprechen, wenn wir streng genommen alle  $g \in L^p(E)$  meinen, die sich von  $f$  nur auf einer Nullmenge unterscheiden.

Fassen wir die wichtigsten Eigenschaften zusammen. Auf Beweise wird verzichtet; der Leser kann sie in gängigen Lehrbüchern zur Funktionalanalysis finden, etwa [Alt2002] oder [Schr2000].

**Definition 1.2.1** *Ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  zusammen mit einer Norm  $\|\cdot\|$  wird BANACHraum genannt, wenn er bezüglich der durch die Norm induzierten Metrik ein vollständiger metrischer Raum ist.*

*Wird die Norm durch ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  erzeugt, d. h.  $\|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}$ , und ist  $V$  bezüglich der hierdurch erzeugten Metrik vollständig, so spricht man von einem HILBERTraum.*

Hierbei verstehen wir unter einem *Skalarprodukt* entweder eine Bilinearform (im reellen Fall) oder eine HERMITESche<sup>24</sup> Form (im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ). In jedem Fall soll die Form positiv definit sein.

**Satz 1.2.2 (RIESZ-FISCHER)** *Für  $1 \leq p \leq \infty$  ist  $L^p(E)$  ein BANACHraum.  $L^2(E)$  ist darüber hinaus ein HILBERTraum.*

<sup>22</sup>OTTO LUDWIG HÖLDER, 1859 – 1937

<sup>23</sup>HERMANN MINKOWSKI, 1864 – 1909

<sup>24</sup>CHARLES HERMITE, 1822 – 1901



Hierbei ist zu beachten, dass die Räume nur dann vollständig sind, wenn sie mit der passenden Metrik versehen werden.

Sei beispielsweise  $E = [1, \infty)$  und  $f_n(x) := x^{-1} \mathbf{1}_{[1, n]}$ . Dann bildet  $\{f_n\}_n$  eine gleichmäßig konvergente Funktionenfolge, d. h. sie konvergiert im  $L^\infty$ -Sinne, aber nicht im Sinne der  $L^1$ -Metrik.

**Satz 1.2.3** Für  $1 \leq p < \infty$  ist  $L^p(E)$  separabel, d. h. der Raum enthält eine abzählbare dichte Teilmenge.

Demgegenüber ist  $L^\infty(E)$  nicht separabel.

Besonders nützlich ist es, wenn wir  $L^p$ -Funktionen geeignet durch „schöne“ Funktionen, also stetige oder gar glatte Funktionen approximieren können. Das Hilfsmittel dazu gibt uns der folgende

**Satz 1.2.4** Ist  $E \subset \mathbb{R}^d$  offen, dann ist  $C_0^\infty(E)$ , der Raum der auf  $E$  beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger, ein Unterraum von  $L^p(E)$  ( $1 \leq p < \infty$ ), der bezüglich der  $L^p$ -Metrik dicht in  $L^p(E)$  liegt.

Ist  $E = \mathbb{R}^d$ , genügt es oft aber auch, statt der glatten Funktionen mit kompaktem Träger solche zu nehmen, die im Unendlichen „schnell fallen“, womit gemeint ist, dass sie mitsamt all ihrer partiellen Ableitungen schneller fallen als jedes Polynom anwächst. Wir bezeichnen diesen Raum mit

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d); x^\alpha \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta} f(x) < C_{\alpha\beta} < \infty \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^d, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d \right\}.$$

Auf den ersten Blick erscheint es nicht offensichtlich, dass dieser Raum noch mehr enthält als nur  $C_0^\infty$ -Funktionen, aber die Funktion  $f(x) = e^{-x^2}$  liegt auch in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ .

Auch  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  liegt dicht in allen  $L^p(\mathbb{R}^d)$  für  $1 \leq p < \infty$ .

### 1.2.3 Hilberträume

Abstrakte HILBERTRÄUME haben viele Gemeinsamkeiten mit ihren endlichdimensionalen Spezialfällen  $\mathbb{K}^d$ , die wir aus der Linearen Algebra kennen.  $V$  sei ein HILBERTRAUM.

Zunächst gilt die CAUCHY-SCHWARZsche<sup>25</sup> Ungleichung:

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \quad \text{für alle } x \in V.$$

Der Beweis erfolgt wie im endlichdimensionalen Fall.

Ferner können wir zu jeder Teilmenge  $M \subset V$  die Menge

$$M^\perp := \{x \in V; \langle x, y \rangle = 0\} \text{ für alle } y \in M$$

<sup>25</sup>HERMANN AMANDUS SCHWARZ, 1843 – 1921

bilden.  $M^\perp$  ist stets ein abgeschlossener Unterraum von  $V$ . Ist  $M$  selbst ein abgeschlossener Unterraum von  $V$ , so gilt  $V = M \oplus M^\perp$ .

**Definition 1.2.5** Eine Teilmenge  $S \subset V$  heißt Orthonormalsystem, falls gilt

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = y \\ 0, & \text{falls } x \neq y \end{cases}.$$

Verzichtet man im ersten Fall auf die Normierung, hat also nur  $\langle x, x \rangle \neq 0$  als Bedingung, spricht man von einem Orthogonalsystem (kurz „ONS“).

Durch geeignete Normierung, nämlich  $x' := \frac{x}{\langle x, x \rangle}$ , kann man aus einem Orthogonalsystem ein Orthonormalsystem machen. In vielen Fällen kommt es nur auf die qualitative Aussage an, dass eine bestimmte Menge von Funktionen paarweise orthogonal sind.

**Beispiel 1.2.6** 1. Sei  $V = L^2([0, 1])$ . Dann bilden die Funktionen  $\{e_k; k \in \mathbb{Z}\}$  mit  $e_k := \exp(2\pi i k x)$ ,  $x \in [0, 1]$  ein Orthonormalsystem. Dieses ONS wird uns bei den FOURIERreihen wieder begegnen.

2. Sei  $V = L^2(\mathbb{R})$ . Die Funktionen

$$v_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{x^2}, n \in \mathbb{N}$$

bilden ein Orthonormalsystem in  $V$ . Sie sind bekannt unter dem Namen HERMITE-Funktionen.

3. Sei  $V = L^2([-1, 1])$ . Dann bilden die LEGENDRE-Polynome<sup>26</sup>

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{e^n}{e x^n} ((x^2 - 1)^n), n \in \mathbb{N}$$

ein Orthonormalsystem in  $V$ .

Was auffällt: die im Beispiel aufgeführten Orthonormalsysteme sind abzählbar. Dies folgt daraus, dass  $L^2(E)$  separabel ist.

Die im Beispiel genannten Orthonormalsysteme sind im folgenden Sinne *vollständig*: Gilt für ein ONS  $S$  und ein  $x \in V$ , dass  $\langle x, y \rangle = 0$  für alle  $y \in S$ , dann folgt  $x = 0$ , mit anderen Worten: es gibt keinen nichttrivialen Vektor, der auf allen Elementen des ONS senkrecht steht.

Äquivalente Aussagen sind:

<sup>26</sup> ADRIEN-MARIE LEGENDRE, 1752 – 1833

1. Es gibt kein ONS  $S' \supsetneq S$
2.  $S^\perp = \{0\}$
3.  $\text{Spann}(S)$  liegt dicht in  $V$ .

Ihre Stärke werden die Orthonormalsysteme bei den FOURIERreihen unter Beweis stellen.  
Aber dies vorzustellen, ist Sache des folgenden Kapitels.

# Literaturverzeichnis

- [Alt2002] HANS W. ALT. *Lineare Funktionalanalysis: eine anwendungsorientierte Einführung*. 4. Auflage, 2002. Springer Verlag, Berlin; Heidelberg; New York; etc.
- [Be1976] JOHN J. BENEDETTO. *Real Variable an Integration*. B. G. Teubner, Stuttgart 1976
- [Jones1993] FRANK JONES. *Lebesgue Integration on Euclidean Space*. Jones and Bartlett Publishers, Inc. 1993
- [Leb1902] HENRI L. LEBESGUE. *Intégrale, Longueur, Aire*. Thèse, Faculté des Sciences de Paris, 1902. Abgedruckt in *Ann. Mat. Pura Appl.* **7** (1902), 1 – 129 und in den gesammelten Abhandlungen.
- [Schr2000] HERBERT SCHRÖDER. *Funktionalanalysis*. 2. Aufl. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main 2002
- [ShaSte2003a] RAMI SHAKARCHI, ELIAS M. STEIN. *Fourier Analysis: An Introduction*. Princeton Lectures in Analysis, Vol. 1. Princeton University Press 2003
- [WhZyg1977] RICHARD L. WHEEDEN, ANTONI ZYGMUND. *Measure and Integral*. Marcel Dekker, Inc. 1977
- [Wiener1933] NORBERT WIENER. *The Fourier Integral and certain of its applications*. Cambridge University Press, Cambridge 1933. Nachdruck 1958 bei Dover Publications, New York.