Dr. M. Dücker **Dept. Mathematik**
Prof. Dr. H.–J. Reinhardt **Univ. Siegen**

Ergänzungen zum Vorlesungsskript „Mathematik I für Elektrotechnik“ im Wintersemester 2011/12

In Kap. 1.1:

Verneinung von Existenz- und Universalaussagen:

1. Eine Existenzaussage wird verneint, indem man den Allquantor vor die verneinte Aussage stellt.
   Beispiel:
$$\begin{aligned} & \neg(\exists n \in \mathbb{N}\ n \geq 7 \wedge n \leq 10) \\ \Leftrightarrow\ & \forall n \in \mathbb{N}\ \neg(n \geq 7 \wedge n \leq 10) \\ \Leftrightarrow\ & \forall n \in \mathbb{N}\ \neg(n \geq 7) \vee \neg(n \geq 10) \\ \Leftrightarrow\ & \forall n \in \mathbb{N}\ n < 7 \vee n > 10 \end{aligned}$$

2. Eine Universalaussage wird verneint, indem man den Existenzquantor vor die verneinte Aussage stellt.

Bemerkung (nach Def. 1.1.9): Schnitt und Vereinigung kann man auch für mehr als zwei Mengen $S_1, \dots S_n,\ n \in \mathbb{N}$ definieren:

$$\bigcap_{i=1}^{n} S_i = S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n := \{x \mid \forall 1 \leq i \leq n:\ x \in S_i\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} S_i = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n := \{x \mid \exists 1 \leq i \leq n : x \in S_i\}$$

In Kap. 1.4:

Eigenschaften des Binomialkoeffizienten: Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$.

1. Es gilt:
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = n$$

2. Für $n < k$ ist $\binom{n}{k} = 0$

3. Für $n \geq k$ gilt die Symmetriebedingung
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

4. Es gilt:
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Beweis: Nur 4.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} \\
&= \frac{n! \cdot (k+1) + n!(n-k)}{(n-k)!(k+1)!} \\
&= \frac{n!(k+1+n-k)}{(n+1-(k+1))!(k+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{((n+1)-(k+1))!(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

In Kap. 2.4:

Verfahren von Gauß- Jordan am Beispiel: Gegeben $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Gesucht A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{2.+(-1)*1. \\ 3.+(-2)*1.}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{-3*3.+2.}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & 1 & -3 \end{array}\right) \overset{3.:8}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{2.+3. \\ 1.+(-1)*3.}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & -3 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \end{array}\right) \overset{2.:(-3)}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \end{array}\right)$$

$$\overset{1.+(-2)*2.}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \end{array}\right)$$

Also $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

In Kap. 3.1:

Satz (Cauchy-Kriterium für Zahlenfolgen) *Eine Folge* $(a_n) \subset \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, *ist genau dann konvergent, wenn sie Cauchy-Folge ist, d.h.*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n_0 \in \mathbb{N} \, \forall \, m, n \geq n_0 \text{ gilt: } |a_n - a_m| < \varepsilon \, .$$

Beispiel (zu Cauchy-Folgen)

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}, \; n \in \mathbb{N} \, .$$

Def. Eine *Teilfolge* $\mathbb{N}'$ der natürlichen Zahlen bezeichnet immer eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ mit unendlichen vielen verschiedenen Elementen.

Def. Eine *Teilfolge* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}'} \subset \mathbb{K}$ *konvergiert* $\Longleftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{K} \, \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}' \, \forall n \geq n_0, \; n \in \mathbb{N}'$ gilt:

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon$$

Satz *Eine Folge* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ *konvergiert genau wenn jede Teilfolge* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}'}$, $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$, *gegen denselben Limes konvergiert.*

Satz (von Bolzano-Weierstrass) *Jede beschränkte Folge* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ *enthält eine konvergente Teilfolge.*

In Kap. 3.2:

Satz (**Cauchy-Kriterium für Reihen;** vor Satz 3.2.5) *Eine Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergiert genau wenn Folgendes gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n, m \geq n_0, \; n, m \in \mathbb{N}, \; n \geq m, \text{ gilt } \quad \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon$$

(Beispiel 3.2.10 a)

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ heißt „alternierende harmonische Reihe“.

(Nach Definition 3.2.16) Eine *Abbildung* $f : D \longrightarrow W$ muss immer „wohldefiniert“ sein, d.h.

$$x = y \Longrightarrow Ax = Ay \text{ oder äquiv. } Ax \neq Ay \Longrightarrow x \neq y \, .$$

In Kap. 4.2:

Satz (**Nullstellensatz;** vor Satz 4.2.10)

Sei $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $g(a)g(b) < 0$. Dann existiert (mindestens) eine Nullstelle $z \in]a,b[\,,\ g(z) = 0$.

Satz (am Ende von Kap. 4.2) *Jede stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ nimmt auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b] \subset D$ ihr Maximum und Minimum an, d.h. $\exists\ \overline{z},\ \underline{z} \in [a,b]$ mit $f(\overline{z}) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = \max f([a,b])$, $f(\underline{z}) = \inf_{x\in[a,b]} f(x) = \min f([a,b])$.*

In Kap. 5.2:

Beispiel 5.2.12 b) $f(x) = x^2 \sin(2x)$, $\quad f^{(100)(x)} =?$

Man weiß, dass

$$\frac{d^\ell}{dx^\ell}\sin(2x) = 2^\ell \begin{cases} (-1)^k \sin(2x), & \ell = 2k \\ (-1)^k \cos(2x), & \ell = 2k+1\,. \end{cases}$$

Mit Hilfe der Leibniz-Regel (Satz 5.2.11) ergibt sich

$$\begin{aligned} f^{(100)}(x) &= x^2 2^{100}\sin(2x) + \binom{100}{1} 2x \cdot 2^{99}(-\cos 2x) + \binom{100}{2} 2 \cdot 2^{98}(-\sin 2x) \\ &= 2^{100}\big\{(x^2 - 2475)\sin 2x - 100x\cos 2x\big\}\,. \end{aligned}$$

In Kap. 5.3:

Satz (**Erweiterter Mittelwertsatz;** nach Satz 5.3.3)

Seien $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ differenzierbar in $]a,b[$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a,b[\,$. Dann existiert ein $\xi \in]a,b[$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Beispiel (nach Definition 5.3.5) Es gibt Funktionen, die überall differenzierbar sind, deren Ableitung aber nicht stetig ist, z.B.

$$f(x) = \begin{cases} x^2\cos(\frac{1}{x}), x \neq 0, \\ 0,\ x = 0; \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 2x\cos(\frac{1}{x}) + \sin(\frac{1}{x}),\ x \neq 0, \\ 0,\ x = 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist überall differenzierbar – auch bei $x = 0$ – aber f' ist nicht stetig bei $x = 0$.

In Kap. 5.4:

Satz (vor Satz 5.4.4) *Sei* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *n-mal stetig differenzierbar und bei* $z \in]a.b[$ *gelte*

$$f^{(j)}(z) = 0,\ 1 \le j \le n-1, \quad f^{(n)}(z) \neq 0\,(n \ge 2)\,.$$

Dann gelten folgende Aussagen:

a) Ist n *ungerade, dann liegt bei* z *kein lokales Extremum vor.*

b) Ist n *gerade, dann ist*

$$z \left\{ \begin{array}{c} \textit{lokales Max.} \\ \textit{lokales Min.} \end{array} \right\} \textit{ falls } \begin{cases} f^{(n)}(z) < 0 \\ f^{(n)}(z) > 0\,. \end{cases}$$

In Kap. 5.5:

In **Satz 5.5.1** (Ergänzung nach dem 1. Satz) Dann gilt $g(x) \neq 0$ für alle $x \in]a,b[$. Ferner ...

Beispiel (nach Beispiel 5.5.2 f)

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0\,, & x = 0, \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x^3}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0\,, & x = 0; \end{cases}$$

allgemein gilt

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_m\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0\,, & x = 0, \end{cases}$$

wobei p_m = Polynom m-ten Grades ($m = 2n+1$) ist. Nach der Regel von l'Hospital konvergiert

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\nu} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \longrightarrow 0(x \longrightarrow 0) \quad \forall \nu \in \mathbb{N}_0\,,$$

und deshalb ist

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x \neq 0}} f^{(n)}(x) = 0\,.$$

Also ist f beliebig oft differenzierbar mit Ableitungen $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Für die Taylor-Reihe bei $x_0 = 0$ erhält man

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)x^k = 0\,,$$

d.h. diese stimmt mit f nur bei $x = 0$ überein.

In Kap. 6.1:

Beispiel (vor Bem. 6.1.2): **Unter- und Obersumme**

Für $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, und eine äquidistante Unterteilung von $[0,1]$, $x_k = k/N$, $k = 0, \ldots, N$, gilt (mit $f_k = f(x_k) = m_k$) für die *Untersumme*

$$F_N := \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} f_k = \frac{1}{N^3} \sum_{k=0}^{N-1} k^2 = \frac{(N-1)N(2N-1)}{6N^3},$$

und für die *Obersumme* (mit $M_k = f(x_{k+1})$)

$$\hat{F}_N := \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} M_k = \frac{1}{N^3} \sum_{j=1}^{N} j^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6N^3}.$$

Im Limes $N \longrightarrow \infty$ hat man

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} F_N = \lim_{N\longrightarrow\infty} \hat{F}_N = \frac{1}{3}.$$

Def. (nach Satz 6.1.4) **Treppenfuktionen**

Zu einer gegebenen Zerlegung $a = \tilde{x}_0 < \tilde{x}_1 < \ldots < \tilde{x}_m = b$ und Zahlen $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \ldots, m$, heißt $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} &\varphi(x) = c_k,\ x \in]\tilde{x}_{k-1}, x_k],\ k = 1, \ldots, m, \\ &\varphi(a) = c_0, \end{aligned}$$

die zugehörige **Treppenfunktion**.

Satz (vor Satz 6.1.5) Treppenfunktionen sind integrierbar mit dem Integral

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} c_k(\tilde{x}_k - \tilde{x}_{k-1}).$$

Satz 6.1.5

(Ergänzung in c)): $|f|$ ist integrierbar und ...

(Zusätzlich) d) Definiert man

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) > 0, \\ 0, & \text{sonst}; \end{cases} \quad f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{falls } f(x) < 0, \\ 0, & \text{sonst}; \end{cases}$$

dann sind mit f auch f_+ und f_- integrierbar.

Bem. (nach Satz 6.1.5)

Es gilt $f = f_+ - f_-$ und $|f| = f_+ + f_-$.

In Kap. 6.2: (nach Beispiel 6.2.2):

Def.: Für eine Zerlegung $Z : a = x_0 < \ldots < x_N = b$ von $[a,b]$ und beliebige $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k],\ k = 1, \ldots, N$, heißt

$$S_Z := \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

Riemannsche Summe von f.

Satz Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen $Z_n : a = x_0^{(n)} < \ldots < x_N^{(n)} = b,\ N = N_n$, mit

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \Delta^{Z_n} = 0, \quad \text{wobei } \Delta^{Z_n} = \max_{1 \leq k \leq N} \left(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)} \right)$$

(„Feinheit von Z_n“)

dann gilt

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} S_{Z_n} = \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Beispiel Für $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [1,a]$, $a > 1$, und die Zerlegung $x_k^{(n)} = a^{k/n}$, $k = 0, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$, und mit den Zwischenpunkten $\xi_k^{(n)} = x_{k-1}^n = a^{(k-1)/n}$ erhält man

$$\int_1^a \frac{1}{x}\, dx = \lim_n S_{Z_n} = \lim_n \frac{a^{1/n} - 1}{1/n} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = ln\, a\,.$$

In Kap. 6.3: (am Anfang):

Reelle Polynome $Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ besitzen eine **reelle kanonische Produktdarstellung**

$$Q(x) = a_n(x - x_1)^{\varrho_1} \ldots (x - x_r)^{\varrho_r}(x^2 + A_1 x + B_1)^{\sigma_1} \ldots (x^2 + A_s x + B_s)^{\sigma_s}\,,$$

wobei $x_i, i = 1, \ldots, r$, die reellen Nullstellen (mit Vielfachheit ϱ_i) sind und $\varrho_1 + \ldots + \varrho_r + 2\sigma_1 + \ldots + 2\sigma_s = n =$ grad Q. Für jede „echt komplexe“ Nullstelle $\zeta = \alpha + i\beta$ ist auch $\bar{\zeta}$ Nullstelle, wobei

$$(x - \zeta)(x - \bar{\zeta}) = x^2 + Ax + B \text{ (mit } A = -2\alpha, B = \alpha^2 + \beta^2)\,.$$

Beispiel $Q(x) = x^4 - x = x(x^3 - 1) = x(x-1)(x^2 + x + 1)$ mit Nullstellen: $0, 1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Eine **Partialbruchzerlegung** (Abk.: **PBZ**) für eine rationale Funktion $r(x) =$

$P(x)/Q(x)$, grad $P <$ grad Q, hat dann im Reellen die Gestalt

$$\begin{aligned} r(x) = \quad & \frac{a_{11}}{x-x_1} + \frac{a_{12}}{(x-x_1)^2} + \ \dots \ + \frac{a_{1\varrho_1}}{(x-x_1)^{\varrho_1}} \\ & + \dots \\ & + \frac{a_{r1}}{x-x_r} + \frac{a_{r2}}{(x-x_r)^2} + \ \dots \ + \frac{a_{r\varrho_r}}{(x-x_r)^{\varrho_r}} \\ & + \frac{\alpha_{11}x+\beta_{11}}{x^2+A_1x+B_1} + \dots + \frac{\alpha_{1\sigma_1}x+\beta_{1\sigma_1}}{(x^2+A_1x+B_1)^{\sigma_1}} \\ & + \dots \\ & + \frac{a_{s1}x+\beta_{s1}}{x^2+A_sx+B_s} + \dots + \frac{\alpha_{s\sigma_s}x+\beta_{s\sigma_s}}{(x^2+A_sx+B_s)^{\sigma_s}}\,. \end{aligned}$$

Beispiel $\quad r(x) = \frac{x+1}{x^4-x} = \frac{x+1}{x(x-1)(x^2+x+1)}$.

Durch den Ansatz (siehe oben)

$$r(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{\alpha x+\beta}{x^2+x+1}$$

lassen sich a, b, α, β bestimmen;

$$a = -1, b = \frac{2}{3}, \alpha = \frac{1}{3}, \beta = -\frac{1}{3}\,.$$

In Kap. 6.4: (nach Def. 6.4.1)

Bem.: Uneigentliche Integrale heißen „konvergent“, wenn der Limes endlich ist; sonst heißen sie „divergent“. Wenn der Limes $\pm\infty$ ist, dann heißt ein unbestimmtes Integral auch „bestimmt divergent“. Im Sinne des Skripts „existiert“ ein uneigentliches Integral, falls es konvergent oder bestimmt divergent ist.

Zu *Beispiel 6.4.4 b):*

Die PBZ von $\frac{1}{t^2-1}$ ist

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{(t+1)(t-1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1}$$

mit $A = -\frac{1}{2}$ und $B = \frac{1}{2}$.

Satz 6.4.7 heißt auch **Integralvergleichskriterium**. Man erhält darin die Abschätzungskette

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} f(n) \le \int\limits_p^{\infty} f(x)dx \le \sum_{n=p}^{\infty} f(n) \le f(p) + \int\limits_p^{\infty} f(x)dx\,.$$