Prof. Dr. H.–J. Reinhardt **Dept. Mathematik**
Nicole Klein

Praktische Übungen (2) zur Vorlesung „Numerik I“ im Wintersemester 2011/2012

(Abgabetermin: Donnerstag, 24.11.11, 12 Uhr)

Von den folgenden Aufgaben berechne jeder Teilnehmer zwei, und zwar 4 und 7 bzw. 5 und 6, je nachdem, ob

die letzte Ziffer der Matrikel Nr. (mod 3) + 1

gerade bzw. ungerade ist.

Nullstellenberechnung
In den folgenden Aufgaben 4 und 5 sind Näherungen $x_0, x_1, x_2, \ldots$ für Nullstellen z von Funktionen f in Intervallen $I = [a, b]$ zu berechnen. Aus der Taylorformel folgt für $f \in C^2[a, b]$

$$0 = f(z) = f(x_t) + (z - x_t)f'(x_t) + \mathrm{O}(|z - x_t|^2),$$

so dass für die a–posteriori–Fehlernäherung $s_t := -f(x_t)/f'(x_t)$ gilt:

$$z - x_t = s_t + \mathrm{O}(|z - x_t|^2),$$

falls $|f'(x)| \geq m > 0$ für alle x aus einer Umgebung $U \subset [a, b]$ von z. Berechnen und drucken Sie (neben den in den einzelnen Aufgaben angegebenen Größen) für $t = 0, 1, 2, \ldots$ jeweils

$$t \;|\; x_t \;|\; s_t$$

und beenden Sie die Rechnung, falls $|s_t| < 10^{-12}$ oder $t \geq 20$ wird. Bilden Sie die Grafiken der Funktionen f und markieren Sie die gesuchten Nullstellen und ihre Näherungen.

4. (a) Mit Hilfe des **Verfahrens der sukzessiven Approximation**,

$$x_t := g(x_{t-1}),\ t = 1, 2, \ldots,\ \text{mit } g(x) = x + f(x),$$

berechnen Sie Näherungen für die Nullstellen von f_3, f_4, f_6. Drucken Sie hier zusätzlich die a–priori– und a–posteriori–Fehlerschranken

$$r_t := \frac{q^t}{1-q}|x_1 - x_0| \text{ und } w_t := \frac{q}{1-q}|x_t - x_{t-1}|,\ t = 1, 2, \ldots,$$

mit $q := \max\limits_{a \leq x \leq b} |g'(x)|$. Als Startwerte wählen Sie jeweils $x_0 := \dfrac{a+b}{2}$.

(b) Mit der **Regula falsi**

$$x_{t+1} = x_t - f(x_t)\frac{x_t - x_{t-1}}{f(x_t) - f(x_{t-1})}\ ,\ t = 1, 2, \ldots$$

(mit $x_0 := a,\ x_1 := b$) berechnen Sie Näherungen für die Nullstellen der Funktionen f_3, f_4, f_6.

5. (Newtonsches Verfahren und Regula falsi für Polynome)

(a) Berechnen Sie die Nullstellen von $p = f_1, f_7$ mit dem Newtonschen Verfahren

$$x_{t+1} = x_t - \frac{f(x_t)}{f'(x_t)}\ , \quad t = 0, 1, \ldots\ ,$$

für die folgenden Startwerte x_0:

$$x_0 = -3,\ x_0 = -1.5,\ x_0 = 0,\ x_0 = 1.5,\ x_0 = 3.$$

(b) Berechnen Sie die Nullstellen von $p = f_1, f_7$ mit der Regula falsi

$$x_{t+1} = x_t - f(x_t)\frac{x_t - x_{t-1}}{f(x_t) - f(x_{t-1})}\ , \quad t = 1, 2, \ldots\ ,$$

für die folgenden Startwerte x_0, x_1:

$$x_1 = -1.8,\ x_1 = -1,\ x_1 = 0.5,\ x_1 = 1,\ x_1 = 2;$$

hierbei sind die zugehörigen x_0 jeweils wie in (a) zu wählen. In (a) und (b) gewinnen Sie die für die Iterationsformel bzw. für s_t benötigten Werte $p(x_t)$, $p'(x_t)$ und $(p(x_t) - p(x_{t-1}))/(x_t - x_{t-1})$ jeweils mit dem Hornerschema. Hierzu beachten Sie: Mit dem zu $p \in P_n$ aus der 1. Zeile des Hornerschemas erhaltenen $q_t \in P_{n-1}$ mit $p = p(x_t) + (x - x_t)q_t$ gilt $p'(x_t) = q_t(x_t)$ und $\dfrac{p(x_t) - p(x_{t-1})}{x_t - x_{t-1}} = q_t(x_{t-1})$. Bei der Regula falsi soll anstelle der Fehlernäherung s_t die Fehlernäherung $-p(x_t)/q_t(x_{t-1})$ ausgedruckt werden.

Funktionen:

$$\begin{array}{rcl}
f_1(x) & = & x^5 - 0.4x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 4x - 1.5,\ x \in \mathbb{R} \\
f_2(x) & = & \cos(x/3),\ x \in [a,b] = [2.5, 7] \\
f_3(x) & = & 1 - \ln\ x,\ x \in [a,b] = [2,3],\ q = 2/3 \\
f_4(x) & = & -x + 0.75\cos\ x + 18,\ x \in [a,b] = [15,20],\ q = 0.75 \\
f_5(x) & = & \frac{1}{2} - x + \frac{1}{5}\sin\ x,\ x \in [a,b] = [0,1],\ q = 1/5 \\
f_6(x) & = & 1 - \frac{1}{2}e^x,\ x \in [a,b] = [0,1],\ q = 0.5 \\
f_7(x) & = & 46189x^5 - 109395x^4 + 90090x^3 - 30030x^2 + 3465x - 63
\end{array}$$

6. Interpolationspolynome

Berechnen Sie mit den Punkten $x_j = jh, j = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$, die Funktionswerte des Interpolationspolynoms

$$p_{0,1,2,3}(x) = y_0 + (x-x_0)y_{0,1} + (x-x_0)(x-x_1)y_{0,1,2} + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)y_{0,1,2,3}$$

mit der Schrittweite $h = 0.1$ für die Funktion $f(x) = \cosh x, x = -0.1(0.02)0.4$.

Berechnen Sie die dividierten Differenzen $f_{0,\ldots,\ell} = y_{0,\ldots,\ell}$ mit dem entsprechenden Differenzenschema und klammern Sie das Polynom wie beim Horner-Schema. Drucken Sie

$$x |\ \cosh x\ | p_{0,1,2,3}(x)\ |\ \cosh x - p_{0,1,2,3}(x)\,.$$

Bemerkung: Für $x_0 \leq x \leq x_3$ ist das Restglied $R(x) = \cosh x - p_{0,1,2,3}(x)$ klein, während außerhalb dieses Intervalles, also bei Extrapolation, das Restglied stark zunimmt.

7. An den äquidistanten Stellen $x_j = jh,\ j = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \ldots$, sind die **zentralen Differenzenquotienten** $D^s f_j$ zur Approximation von $f^{(s)}(x_j)$ erklärt durch

$$\begin{aligned} D^0 f_j &= f_j = f(x_j), \\ D^{s+1} f_j &= \frac{1}{h}\left(D^s f_{j+\frac{1}{2}} - D^s f_{j-\frac{1}{2}}\right),\ s = 0, 1, 2, \ldots\,. \end{aligned}$$

Vergleichen Sie, wie die Ableitungen der Funktion $f(x) = \cos\ x$ durch die entsprechenden Differenzenquotienten approximiert werden, indem Sie

(a) mit einfacher Genauigkeit

(b) mit doppelter Genauigkeit

berechnen und drucken

x_j	h	$\cos\ x_j$	$\sin\ x_j$	$D^1 f_j$	$D^2 f_j$	$D^3 f_j$	$D^4 f_j$	$-\cos\ x_j - D^2 f_j$

für $x_j = 0(0.125)1$ und $h = 2^{-3}, 2^{-5}, 2^{-7}, 2^{-9}$. Geben Sie den Fehler

$$Err_2 = \max_{x_j = 0(0.125)1} |-\cos\ x_j - D^2 f_j|$$

gegen $1/h$ graphisch in doppelt-logarithmischer Darstellung aus.