Prof. Dr. H.–J. Reinhardt **Dept. Mathematik**
Nicole Klein

Praktische Übungen (3) zur Vorlesung „Numerik I“ im Wintersemester 2011/2012

(Abgabetermin: Donnerstag, 22.12.11, 12 Uhr)

Entsprechend der Formel letzte Ziffer der Matrikel Nr. (mod 3) + 8 löse jeder Teilnehmer die entsprechende der folgenden Aufgaben mit dieser Nummer:

8. Numerische Integration der Integrale I_1, I_2 mit A) und E) sowie Aufgabe C) für überbestimmte Gleichungssysteme.

9. Numerische Integration der Integrale I_3, I_4 mit C) und E) sowie Aufgabe B) für überbestimmte Gleichungssysteme.

10. Numerische Integration der Integrale I_4, I_5 mit D) und E) sowie Aufgabe A) für überbestimmte Gleichungssysteme.

Numerische Integration
Bestimmen Sie zunächst den exakten Wert der folgenden Integrale auf möglichst 15 Dezimalstellen.

$$I_1 = \int_0^1 x^3 e^x dx; \qquad I_2 = \int_0^1 e^{-x^2} dx; \qquad I_3 = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\, dx\ ;$$

$$I_4 = \int_0^{2\pi} x \sin 3x \cos x\ dx; \quad I_5 = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1-0.64\sin^2 x)^{1/2}}\, dx\ .$$

Zur näherungsweisen Berechnung von $I = \int_0^b f(x)dx$ sei

$$N = 2^n; \qquad h = \frac{b-a}{N}; \qquad x_j = a + jh,\ j \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie Näherungen der obigen Integrale mit Hilfe der Romberg–Integration (alle Teilnehmer) sowie zum Vergleich für $n = 0, 1, \ldots, 6$ durch die folgenden summierten Quadraturformeln. Drucken Sie für jedes Integral den exakten Wert I sowie die Näherungen in der Form

$$n \qquad\qquad Q \qquad\qquad I - Q\ .$$

Alle Rechnungen sind in doppeltgenauer Arithmetik auszuführen.

A) **Hermitesche Formel**

$$Q_H = h\left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{N-1}) + \frac{1}{2}f(x_N)\right) + \frac{h^2}{12}\Big(f'(x_0) - f'(x_N)\Big)$$

B) **Simpsonsche Formel**

$$Q_S = \frac{h}{6}\big(f(x_0) + 4f(x_{1/2}) + 2f(x_1) + 4f(x_{3/2}) + \ldots + 4f(x_{N-1/2}) + f(x_N)\big)$$

C) **Gaußsche Formel (2–Punkt–)**

$$Q_{G_2} = \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{N-1}\left\{f(x_{j+1/2} - h') + f(x_{j+1/2} + h')\right\} \text{ mit } h' = \frac{\sqrt{3}}{6}h.$$

D) **Gaußsche Formel (3–Punkt–)**

$$Q_{G_3} = \frac{h}{18}\sum_{j=0}^{N-1}\left\{5f(x_{j+1/2} - h') + 8f(x_{j+1/2}) + 5f(x_{j+1/2} + h')\right\} \text{ mit } h' = \frac{\sqrt{15}}{10}h.$$

E) **Rombergintegration:**

Mit $N_j = 2^j,\ h_j = (b-a)/N_j,\ j = 0, 1, \ldots, 6$,
berechnen Sie mit der summierten Sehnentrapezformel

$$S_j^{(0)} = h_j\left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{N_j-1}) + \frac{1}{2}f(x_{N_j})\right),\ j = 0, \ldots, 6,$$

und

$$S_j^{(k+1)} = \frac{1}{4^{k+1}-1}\left(4^{k+1}S_{j+1}^{(k)} - S_j^{(k)}\right),\ j = 0, \ldots, 6-k;\ k = 0 \ldots, 5.$$

Drucken Sie die erhaltenen Werte nach dem folgenden Schema:

$$\begin{array}{llll}
S_0^{(0)} & & & \\
S_1^{(0)} & S_0^{(1)} & & \\
S_2^{(0)} & S_1^{(1)} & S_0^{(2)} & \\
\vdots & & & \\
S_6^{(0)} & S_5^{(1)} & S_4^{(2)} \ldots\ldots & S_0^{(6)}
\end{array}$$

Ferner drucken Sie das entsprechende Schema der Fehler $I - S_{i-k}^{(k)},\ k = 0, \ldots, i;\ i = 0, \ldots, 6$.

Überbestimmte Gleichungssysteme

A) Gegeben sei eine Matrix A mit den Elementen $a_{jk},\ j = 1, \ldots, N,\ k = 1, \ldots, n$ mit N Zeilen und n Spalten, $n \le N$. Bestimmen Sie zu $b = (b_1 \ldots, b_N)$ die Lösung $z = (z_1, \ldots, z_n)$ des überbestimmten Gleichungssystems $Ax = b$ nach der **Methode des kleinsten Fehlerquadrats.**

Die Lösung z des Gleichungssystems $Ax = b$ kann mit Hilfe der Orthogonalisierung der Spaltenvektoren $a_1, \ldots, a_n$ der Matrix A unter Verwendung des euklidischen Skalarprodukts und der zugehörigen euklidischen Norm wie folgt erhalten werden:

Sind $v_1, \dots, v_n$ die aus $a_1, \dots, a_n$ durch das Orthogonalisierungsverfahren entstehenden Vektoren und sind $w_1 \dots, w_n$ die zugehörigen orthonormierten Vektoren,

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 && , \quad w_1 = \frac{1}{||v_1||}\, v_1 \ , \\ v_j &= a_j - \sum_{k=1}^{j-1} (a_j, w_k) w_k && , \quad w_j = \frac{1}{||v_j||}\, v_j \ , \ j = 2, \dots, n \ , \end{aligned}$$

so erhält man $z = (z_1, \dots, z_n)$ gemäß

$$z_n = \frac{1}{||v_n||}\,(b, w_n), \ z_j = \frac{1}{||v_j||} \left\{ (b, w_j) - \sum_{k=j+1}^{n} z_k (a_k, w_j) \right\}, \ j = n-1, \dots, 1.$$

Wählen Sie für A die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 7 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

und als rechte Seite b die Vektoren $e^{(1)} = (1,0,0,0,0)$, $e^{(2)} = (0,1,0,0,0) \dots$, $e^{(5)} = (0,0,0,0,1)$. Berechnen Sie die auftretenden Skalarprodukte und Normen doppelt genau, und drucken Sie jeweils $v_j, w_j (j = 1, \dots, 4)$ und die Lösungen $z^{(k)}$ von $Ax = e^{(k)}$ sowie die Defekte $d^{(k)} = Az^{(k)} - e^{(k)}$ und die Fehlernorm $||d^{(k)}||_2$.

B) Es sei f eine Funktion auf dem Intervall $[-1, +1]$, und es seien M und n natürliche Zahlen sowie $h = \dfrac{1}{M}$, $x_j = jh, \ y_j = f(x_j), \ j = 0, \pm 1, \dots, \pm M$.
Gesucht ist die Ausgleichsparabel nach der **Methode der kleinsten Quadrate**

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k u_k \text{ mit } u_k(x) = x^{k-1}, \ k = 1, \dots, n.$$

Die Koeffizienten γ_k werden aus dem Gleichungssystem bestimmt

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k (a_k, a_j) = (y, a_j), \ j = 1, \dots, n,$$

mit dem Skalarprodukt $(r, s) = \sum\limits_{j=-M}^{M} r_j s_j$ und den Vektoren

$$\begin{aligned} a_k &= \Big(u_k(x_{-M}), \dots, u_k(x_0), \dots, u_k(x_M)\Big), \ k = 1, \dots, n, \\ y &= (y_{-M}, \dots, y_0, \dots, y_M). \end{aligned}$$

Sind $v_1, \dots, v_n$ die Vektoren, die aus $a_1, \dots, a_n$ durch das Orthogonalisierungsverfahren entstehen, und sind $w_1, \dots, w_n$ die zugehörigen orthonormierten Vektoren, dann erhält man die Koeffizienten γ_k rekursiv gemäß

$$\gamma_n = \frac{1}{||v_n||}(y, w_n), \ \gamma_j = \frac{1}{||v_j||} \left\{ (y, w_j) - \sum_{k=j+1}^{n} \gamma_k (a_k, w_j) \right\}, \ j = n-1, \dots, 1.$$

Berechnen und drucken Sie jeweils für $M = 10$ und $n = 2, 5, 10$

$$d = \max_{-M \le j \le M} |P_n(x_j) - y_j| \text{ und } \gamma_k,\ k = 1, \dots, n,$$

sowie für $x = -1(0.05) + 1$

$$x \qquad f(x) \qquad P_n(x) \qquad P_n(x) - f(x)$$

für die Funktionen

$f(x) = e^{-x}$ und $f(x) = \sqrt{1+x}$.

Berechnen Sie hierbei die Skalarprodukte jeweils doppelt genau.

C) Auf dem halboffenen Intervall $(-\pi, +\pi]$ sei die Funktion f gegeben, es seien N und n natürliche Zahlen sowie

$$h = \frac{2\pi}{N},\ x_j = -\pi + (j - \frac{1}{2})h,\ y_j = f(x_j),\ j = 1, \dots, N.$$

Gesucht ist das trigonometrische Ausgleichspolynom

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k u_k \text{ mit } u_k(x) = \sin\ kx,\ k = 1, \dots, n.$$

Die Koeffizienten ergeben sich hier aus den **diskreten Eulerschen Formeln**

$$\gamma_k = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N} y_j u_k(x_j),\ k = 1, \dots, n.$$

Wählen Sie $N = 19$ sowie $n = 5$ und $n = 9$ und die Funktionen

(a) periodische Heaviside–Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad -\pi + \varepsilon < x < -\varepsilon \\ 0 & \text{für} \quad |\pi + x| \le \varepsilon,\ |x| \le \varepsilon,\ |\pi - x| \le \varepsilon \\ +1 & \text{für} \quad \varepsilon < x < \pi - \varepsilon \end{cases}$$

mit $\varepsilon = 10^{-6}$,

(b) $f(x) = \sinh x$,

und berechnen und drucken Sie jeweils

$$d = \max_{j=1\dots,N} |p_n(x_j) - y_j|,\ \gamma_k,\ k = 1, \dots, n,$$

und für $j = 1, \dots, N$

$$j \qquad x_j \qquad y_j \qquad p_n(x_j) \qquad p_n(x_j) - y_j.$$