Prof. Dr. H.–J. Reinhardt **Dept. Mathematik**
Nicole Klein

Praktische Übungen (4)
zur Vorlesung „Numerik I“
im
Wintersemester 2011/2012
(Abgabetermin: Donnerstag, 26.01.12, 12 Uhr)

Lösen Sie eine der folgenden Aufgaben:

11. **Aufgabe A** (GSV für lineare Gleichungssysteme) **und Aufgabe B** (ESV für lineare Gleichungssysteme) mit $A = S,\ b = (1, 0, 1, 1, 0, 1)^\top$
oder
$A = H,\ b = (1, -1, -1, 1)^\top$.

12. **Aufgabe C** (GSV für nichtlineare Gleichungssysteme).

13. **Aufgabe D** (Newton-Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme).

Iterative Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme

Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ gestattet eine Zerlegung $A = L + D + R$ mit einer strikten unteren Dreiecksmatrix $L = L_A$, einer strikten oberen Dreiecksmatrix $R = R_A$ und einer Diagonalmatrix $D = D_A$. Sei ferner $E = E_n$ die Einheitsmatrix aus $\mathbb{R}^{n,n}$. Es gelte $a_{jj} \neq 0$ für alle j.
Benutzen Sie für die folgenden Aufgaben als Vektornorm die Maximumnorm

$$||x|| = ||x||_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|,\ x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

und die maximale Zeilensummennorm als zugehörige Matrizennorm

$$||A|| = ||A||_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|,\ A = (a_{jk})_{(n,n)} \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

A) Berechnen Sie iterativ Näherungslösungen des Gleichungssystems $Ax = b$ mit Hilfe des **Gesamtschrittverfahrens** $Dx^{(t+1)} = b - (A - D)x^{(t)}$, also

$$x_j^{(t+1)} = \frac{1}{a_{jj}} \left(b_j - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} a_{jk} x_k^{(t)} \right),\ j = 1, \ldots, n,\ t = 0, 1, 2, \ldots,$$

mit den Fehlerabschätzungen

$$||x^{(t)} - x|| \leq \frac{q}{1-q} ||x^{(t)} - x^{(t-1)}|| \leq \frac{q^t}{1-q} ||x^{(1)} - x^{(0)}||,\ t = 1, 2, 3, \ldots\ .$$

Hierbei ist $q := ||D^{-1}(A-D)|| = \max\limits_{1\le j\le n} \left(\frac{1}{|a_{jj}|} \sum_{\substack{k=1\\k\ne j}}^{n} |a_{jk}| \right)$.

Berechnen und drucken Sie q sowie für $t = 1, 2, \ldots$

$$||Ax^{(t)} - b||,\ \frac{q}{1-q}||x^{(t)} - x^{(t-1)}||,\ \frac{q^t}{1-q}||x^{(1)} - x^{(0)}||.$$

Brechen Sie die Rechnung ab, wenn gilt $\frac{q}{1-q}||x^{(t)} - x^{(t-1)}|| \le 5.E-7$; führen Sie jedoch höchstens 100 Iterationen aus. Ferner drucken Sie die zuletzt berechnete Näherung $x^{(t)}$. Als Startwert $x^{(0)}$ wählen Sie jeweils den Nullvektor.

B) Berechnen Sie iterativ Näherungslösungen des Gleichungssystems $Ax = b$ mit Hilfe des **Einzelschrittverfahrens** $(L + D)x^{(t+1)} = b - Rx^{(t)}$, also

$$x_j^{(t+1)} = \frac{1}{a_{jj}} \left(b_j - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk} x_k^{(t+1)} - \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk} x_k^{(t)} \right),\ j = 1, \ldots, n,\ t = 0, 1, 2, \ldots$$

mit den Fehlerabschätzungen

$$||x^{(t)} - x|| \le \frac{q}{1-q}||x^{(t)} - x^{(t-1)}|| \le \frac{q^t}{1-q}||x^{(1)} - x^{(0)}||,\ t = 1, 2, \ldots,$$

wobei

$$q_1 = \frac{1}{|a_{11}|} \sum_{k=2}^{n} |a_{1k}|,\ q_j = \frac{1}{|a_{jj}|} \left\{ \sum_{k=1}^{j-1} |a_{jk}| q_k + \sum_{k=j+1}^{n} |a_{jk}| \right\},\ j = 2, \ldots, n;$$
$$q := \max_{1\le j\le n} q_j.$$

Berechnen und drucken Sie $q, q_j,\ j = 1, \ldots, n$ sowie für $t = 1, 2, \ldots$

$$||Ax^{(t)} - b||,\ \frac{q}{1-q}||x^{(t)} - x^{(t-1)}||,\ \frac{q^t}{1-q}||x^{(1)} - x^{(0)}||.$$

Brechen Sie die Rechnung ab, wenn gilt $\frac{q}{1-q}||x^{(t)} - x^{(t-1)}|| \le 5.E-7$; führen Sie jedoch höchstens 50 Iterationen aus. Ferner drucken Sie die zuletzt berechnete Näherung $x^{(t)}$. Als Startwert $x^{(0)}$ wählen Sie jeweils den Nullvektor.

$$H = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 8 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 8 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 8 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Iterative Verfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme

Sei die Funktion y Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned}&y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \quad a \le x \le b,\\ &y(a) = \alpha, \ y(b) = \beta.\end{aligned}$$

Mit einer natürlichen Zahl N, $h = \dfrac{b-a}{N}$ und $x_j = a + jh$ werden Näherungswerte für die Funktionswerte $y(x_j)$ erhalten als Lösung $(u_0, u_1, \ldots, u_N)$ der Differenzenapproximation

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{h^2}\left(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}\right) &= f\left(x_j, u_j, \frac{1}{2h}(u_{j+1} - u_{j-1})\right), \ j = 1, \ldots, N-1,\\ u_0 = \alpha, \quad u_N &= \beta.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Dieses nichtlineare Gleichungssystem hat die Form

$$Au = g(u) \tag{2}$$

mit $u = (u_1, \ldots, u_{N-1})$, der $(N-1) \times (N-1)$–Tridiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0\\ 1 & -2 & 1 & . & & & & .\\ 0 & 1 & -2 & 1 & . & & & .\\ . & . & . & . & . & . & & .\\ . & & . & . & . & . & . & .\\ . & & & . & 1 & -2 & 1 & 0\\ . & & & & . & 1 & -2 & 1\\ 0 & . & . & . & . & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

und der Funktion $g = (g_1, \ldots, g_{N-1}) : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}^{N-1}$, die gegeben ist durch

$$\begin{aligned} g_1(v) &= h^2 f\left(x_1, v_1, \frac{1}{2h}(v_2 - \alpha)\right) - \alpha,\\ g_j(v) &= h^2 f\left(x_j, v_j, \frac{1}{2h}(v_{j+1} - v_{j-1})\right), \ j = 2, \ldots, N-2,\\ g_{N-1}(v) &= h^2 f\left(x_{N-1}, v_{N-1}, \frac{1}{2h}(\beta - v_{N-2})\right) - \beta, \end{aligned}$$

für $v \in \mathbb{R}^{N-1}$.

Das Gleichungssystem (1) kann auch geschrieben werden in der Form

$$h(u) = 0 \tag{3}$$

mit der Funktion $h(u) = (h_1(u), \ldots, h_{N-1}(u))$, die erklärt ist durch

$$h_j(u) = u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1} - h^2 f\left(x_j, u_j, \frac{1}{2h}(u_{j+1} - u_{j-1})\right), \ j = 1, \ldots, N-1,$$

und $u_0 = \alpha,\ u_N = \beta$.

Für die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} y''(x) &= y(x) + \frac{1}{4} y(x)^2,\ -1 \le x \le 1, \\ y(-1) &= 1,\ y(1) = 1, \end{aligned}$$

sollen im folgenden Näherungslösungen $u^{(t)}$ ermittelt werden.

Wählen Sie $N = 5$ sowie $N = 10$ und als Anfangsnäherung $u^{(0)}$ jeweils

$$u_j^{(0)} = 1 + k\left(\left(1 - \frac{2j}{N}\right)^2 - 1\right),\ j = 0, 1, \ldots, N,$$

mit $k = 0$ und mit $k = 0.4$. Beenden Sie die Rechnung, falls

$$||u^{(t)} - u^{(t-1)}||_\infty < 10^{-5}.$$

C) Lösen Sie das Gleichungssystem (2) mit Hilfe des Iterationsverfahrens

(4) $$Au^{(t+1)} = g\left(u^{(t)}\right),\ t = 0, 1, 2, \ldots\ .$$

Ermitteln Sie hierbei in jedem Iterationsschritt die neue Näherung $u^{(t+1)}$ als Lösung des linearen Gleichungssystems (4) durch das Gaußsche Eliminationsverfahren für Tridiagonalmatrizen. Berechnen Sie $u^{(t)}$, $||Au^{(t)} - g(u^{(t)})||_\infty$ und $||u^{(t)} - u^{(t-1)}||_\infty$, drucken Sie diese Größen für $t = 1, 2, \ldots$, und führen Sie höchstens 30 Iterationen aus.

D) Lösen Sie das Gleichungssystem (3) mit Hilfe des Newtonschen Verfahrens

(5) $$h'\left(u^{(t)}\right)\left(u^{(t+1)} - u^{(t)}\right) = -h\left(u^{(t)}\right),\ t = 0, 1, 2, \ldots\ .$$

Lösen Sie hierbei das lineare Gleichungssystem (5) in jedem Schritt mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens für Tridiagonalmatrizen.
Berechnen Sie $u^{(t)}$, $||h(u^{(t)})||_\infty$ und $||u^{(t)} - u^{(t-1)}||_\infty$, drucken Sie diese Größen für $t = 1, 2, \ldots$, und führen Sie höchstens 10 Iterationen aus.
Hierbei bezeichnet $h'(v)$ die Funktionalmatrix $\left(\frac{\partial h_i}{\partial u_j}\right)_{i,j}$, deren Koeffizientenfunktionen $\frac{\partial h_i}{\partial u_j}$ vorab mit Hilfe der Ableitungen der gegebenen Funktion $f = f(x, y, z) = y + \frac{1}{4}y^2$ zu bestimmen sind.