Prof. Dr. H.–J. Reinhardt **Dept. Mathematik**
Max Kontak **Univ. Siegen**

Praktische Übungen (1)
zur Vorlesung „Numerik I“
im
Wintersemester 2014/2015
(Abgabetermin: Mittwoch, 05.11.14, 08:30 Uhr)

Hinweise: Im Laufe des Semesters werden 3 praktische Übungszettel mit jeweils 3 Aufgaben ausgeteilt. Die Aufgaben können im CIP-Pool (EN-B 222) des Dept. Mathematik oder auf einem anderen Rechner gerechnet werden. Unterstützung kann bei einer Programmierung mit MATLAB gegeben werden. Jeder Teilnehmer soll jeweils 2 Aufgaben pro Übungsblatt lösen; es sind jeweils 2 Wochen für dessen Lösung vorgesehen. Entsprechend den allgemeinen Hinweisen reicht es aus, wenn jeder 3 Aufgaben im Semester bearbeitet und (richtig) löst.
Von dem vorliegenden Aufgabenblatt soll jeder Aufg. 3 lösen. Wenn die Matrikelnr. ungerade bzw. gerade ist, soll zusätzlich noch Aufgabe 1 bzw. 2 gelöst werden.
Die Aufgaben und die zugehörigen Programme sind zum angegebenen Zeitpunkt per E-Mail an

kontak@mathematik.uni-siegen.de

zu senden. Ca. eine Woche später werden zur Übungszeit die Lösungen im CIP-Pool besprochen und präsentiert. Jeder sollte dabei in der Lage sein, seine bearbeiteten Aufgaben zu präsentieren und zu erläutern. Der genaue Termin für die Besprechung der praktischen Aufgaben wird in der Vorlesung bekannt gegeben.

Funktionsberechnung

1. Die folgenden Funktionen p, q sind Näherungen für Arcustangens:

(a) Partialsumme der Potenzreihe

$$p(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \text{ für } |x| \leq 1$$

bzw.

$$p(x) = \frac{\pi}{2} - \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{7x^7}\right] \text{ für } x > 1$$

(b) Anfangsstück der Kettenbruchentwicklung

$$q(x) = \frac{x}{1+}\,\frac{x^2}{3+}\,\frac{4x^2}{5+}\,\frac{9x^2}{7+}\,\frac{16x^2}{9}$$

Vergleichen Sie diese Näherungen mit der Bibliotheksfunktion für Arcustangens in Matlab, indem Sie für $x = 0.0(0.02)\ 1.0\ (0.05)\ 2.0$ berechnen und drucken

$$x \quad p(x) - \arctan(x) \quad q(x) \quad q(x) - \arctan(x)\ .$$

Hinweis zu a), b): Klammern Sie die Terme wie beim Horner–Schema.

Nullstellenberechnung

In den folgenden Aufgaben 2 und 3 sind Näherungen $x_0, x_1, x_2, ...$ für Nullstellen z von Funktionen f in Intervallen $I = [a, b]$ zu berechnen. Aus der Taylorformel folgt für $f \in C^2[a, b]$

$$0 = f(z) = f(x_t) + (z - x_t)f'(x_t) + \mathrm{O}(|z - x_t|^2),$$

so dass für die a–posteriori–Fehlernäherung $s_t := \ -f(x_t)/f'(x_t)$ gilt:

$$z - x_t = s_t + \mathrm{O}(|z - x_t|^2),$$

falls $|f'(x)| \geq m > 0$ für alle x aus einer Umgebung $U \subset [a, b]$ von z. Berechnen und drucken Sie (neben den in den einzelnen Aufgaben angegebenen Größen) für $t = 0, 1, 2, \ldots$ jeweils

$$t \ \mid \ x_t \ \mid \ s_t$$

und beenden Sie die Rechnung, falls $|s_t| < 10^{-12}$ oder $t \geq 20$ wird. Bilden Sie die Grafiken der Funktionen f und markieren Sie die gesuchten Nullstellen und ihre Näherungen.

2. (a) Mit Hilfe des **Verfahrens der sukzessiven Approximation**,

$$x_t := \ g(x_{t-1}),\ t = 1, 2, \ldots,\ \text{mit } g(x) = x + f(x),$$

berechnen Sie Näherungen für die Nullstellen von f_3, f_4, f_6. Drucken Sie hier zusätzlich die a–priori– und a–posteriori–Fehlerschranken

$$r_t := \ \frac{q^t}{1-q}|x_1 - x_0| \text{ und } w_t := \ \frac{q}{1-q}|x_t - x_{t-1}|,\ t = 1, 2, \ldots,$$

mit $q := \max_{a \leq x \leq b} |g'(x)|$. Als Startwerte wählen Sie jeweils $x_0 := \ \dfrac{a+b}{2}$.

(b) Mit der **Regula falsi**

$$x_{t+1} = x_t - f(x_t)\frac{x_t - x_{t-1}}{f(x_t) - f(x_{t-1})}\ ,\ t = 1, 2, \ldots$$

(mit $x_0 := \ a,\ x_1 := \ b$) berechnen Sie Näherungen für die Nullstellen der Funktionen f_3, f_4, f_6.

3. (Newtonsches Verfahren und Regula falsi für Polynome)

(a) Berechnen Sie die Nullstellen von $p = f_1, f_7$ mit dem Newtonschen Verfahren

$$x_{t+1} = x_t - \frac{f(x_t)}{f'(x_t)}\,, \quad t = 0, 1, \ldots\,,$$

für die folgenden Startwerte x_0:

$$x_0 = -3,\ x_0 = -1.5,\ x_0 = 0,\ x_0 = 1.5,\ x_0 = 3.$$

(b) Berechnen Sie die Nullstellen von $p = f_1, f_7$ mit der Regula falsi

$$x_{t+1} = x_t - f(x_t)\frac{x_t - x_{t-1}}{f(x_t) - f(x_{t-1})}\,, \quad t = 1, 2, \ldots\,,$$

für die folgenden Startwerte x_0, x_1:

$$x_1 = -1.8,\ x_1 = -1,\ x_1 = 0.5,\ x_1 = 1,\ x_1 = 2;$$

hierbei sind die zugehörigen x_0 jeweils wie in (a) zu wählen. In (a) und (b) gewinnen Sie die für die Iterationsformel bzw. für s_t benötigten Werte $p(x_t)$, $p'(x_t)$ und $(p(x_t) - p(x_{t-1}))/(x_t - x_{t-1})$ jeweils mit dem Hornerschema. Hierzu beachten Sie: Mit dem zu $p \in P_n$ aus der 1. Zeile des Hornerschemas erhaltenen $q_t \in P_{n-1}$ mit $p = p(x_t) + (x - x_t)q_t$ gilt $p'(x_t) = q_t(x_t)$ und $\dfrac{p(x_t) - p(x_{t-1})}{x_t - x_{t-1}} = q_t(x_{t-1})$. Bei der Regula falsi soll anstelle der Fehlernäherung s_t die Fehlernäherung $-p(x_t)/q_t(x_{t-1})$ ausgedruckt werden.

Funktionen:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= x^5 - 0.4x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 4x - 1.5,\ x \in \mathbb{R} \\
f_2(x) &= \cos(x/3),\ x \in [a,b] = [2.5, 7] \\
f_3(x) &= 1 - \ln\ x,\ x \in [a,b] = [2,3],\ q = 2/3 \\
f_4(x) &= -x + 0.75\cos\ x + 18,\ x \in [a,b] = [15,20],\ q = 0.75 \\
f_5(x) &= \tfrac{1}{2} - x + \tfrac{1}{5}\sin\ x,\ x \in [a,b] = [0,1],\ q = 1/5 \\
f_6(x) &= 1 - \tfrac{1}{2}e^x,\ x \in [a,b] = [0,1],\ q = 0.5 \\
f_7(x) &= 46189x^5 - 109395x^4 + 90090x^3 - 30030x^2 + 3465x - 63
\end{aligned}$$