Prof. Dr. H.–J. Reinhardt **Dept. Mathematik**
Timo Dornhöfer

Praktische Übungen (2)
zur Vorlesung „Numerik I“
im
Wintersemester 2014/2015
(Abgabetermin: Mittwoch, 03.12.14, 08:30 Uhr)

Hinweise: Von dem vorliegenden Aufgabenblatt soll jeder Aufg. 4 lösen. Wenn die Matrikelnr. ungerade bzw. gerade ist, soll zusätzlich noch Aufgabe 5 bzw. 6 gelöst werden.
Die Aufgaben und die zugehörigen Programme sind zum angegebenen Zeitpunkt per E-Mail an

timo.dornhoefer@student.uni-siegen.de

zu senden. Ca. eine Woche später werden zur Übungszeit die Lösungen im CIP-Pool besprochen und präsentiert. Jeder sollte dabei in der Lage sein, seine bearbeiteten Aufgaben zu präsentieren und zu erläutern. Der genaue Termin für die Besprechung der praktischen Aufgaben wird in der Vorlesung bekannt gegeben.

4. Interpolationspolynome

Berechnen Sie mit den Punkten $x_j = jh, j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, die Funktionswerte des Interpolationspolynoms

$$p_{0,1,2,3}(x) = y_0 + (x-x_0)y_{0,1} + (x-x_0)(x-x_1)y_{0,1,2} + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)y_{0,1,2,3}$$

mit der Schrittweite $h = 0.1$ für die Funktion $f(x) = \cosh x, x = -0.1(0.02)0.4$.

Berechnen Sie die dividierten Differenzen $f_{0,\ldots,\ell} = y_{0,\ldots,\ell}$ mit dem entsprechenden Differenzenschema und klammern Sie das Polynom wie beim Horner-Schema. Drucken Sie

$$x|\ \cosh x\,|p_{0,1,2,3}(x)\,|\cosh x - p_{0,1,2,3}(x)\,.$$

Bemerkung: Für $x_0 \le x \le x_3$ ist das Restglied $R(x) = \cosh x - p_{0,1,2,3}(x)$ klein, während außerhalb dieses Intervalles das Restglied stark zunehmen kann.

5. Numerische Integration der Integrale I_1, I_2 mit A), B) und D).

6. Numerische Integration der Integrale I_3, I_4 mit B), C) und D).

Bestimmen Sie zunächst den exakten Wert der für Sie relevanten Integrale auf möglichst 15 Dezimalstellen.

$$I_1 = \int_0^1 x^3 e^x dx; \qquad I_2 = \int_0^1 e^{-x^2} dx; \qquad I_3 = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\, dx\ ;$$

$$I_4 = \int_0^{2\pi} x \sin 3x \cos x\ dx; \quad I_5 = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1-0.64\sin^2 x)^{1/2}}\, dx\ .$$

Zur näherungsweisen Berechnung von $I = \int\limits_0^b f(x)dx$ sei

$$N = 2^n; \qquad h = \frac{b-a}{N}; \qquad x_j = a + jh,\ j \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie Näherungen der obigen Integrale durch die folgenden summierten Quadraturformeln für $n = 1, 2, \ldots, 6$. Drucken Sie für jedes Integral den exakten Wert I sowie die Näherungen in der Form

$$n \qquad\qquad Q \qquad\qquad I - Q\ .$$

Sie können auch alle 3 Quadraturformeln zu einem Integral in einer Tabelle drucken. Alle Rechnungen sind in doppeltgenauer Arithmetik auszuführen.

A) **Hermitesche Formel**

$$Q_H = h\left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{N-1}) + \frac{1}{2}f(x_N)\right) + \frac{h^2}{12}\Big(f'(x_0) - f'(x_N)\Big)$$

B) **Simpsonsche Formel**

$$Q_S = \frac{h}{6}\big(f(x_0) + 4f(x_{1/2}) + 2f(x_1) + 4f(x_{3/2}) + \ldots + 4f(x_{N-1/2}) + f(x_N)\big)$$

C) **Gaußsche Formel (2–Punkt–)**

$$Q_{G_2} = \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{N-1}\big\{f(x_{j+1/2} - h') + f(x_{j+1/2} + h')\big\} \text{ mit } h' = \frac{\sqrt{3}}{6}h.$$

D) **Gaußsche Formel (3–Punkt–)**

$$Q_{G_3} = \frac{h}{18}\sum_{j=0}^{N-1}\big\{5f(x_{j+1/2} - h') + 8f(x_{j+1/2}) + 5f(x_{j+1/2} + h')\big\} \text{ mit } h' = \frac{\sqrt{15}}{10}h.$$