Prof. Dr. H.–J. Reinhardt **Dept. Mathematik**
Timo Dornhöfer

Praktische Übungen (3)
zur Vorlesung „Numerik I“
im
Wintersemester 2014/2015
(Abgabetermin: Mittwoch, 07.01.15, 09:00 Uhr)

Hinweise:

Wenn die Matrikelnr. ungerade bzw. gerade ist, sollen Aufgabe 8 und 10 bzw. 7 und 9 gelöst werden.
Es ist möglich, auch noch eine oder zwei andere Aufgaben dieses Blattes zu lösen. Richtige Lösungen werden auf das Punktekonto für die praktischen Aufgaben angerechnet.

Die Aufgaben und die zugehörigen Programme sind zum angegebenen Zeitpunkt per E-Mail an

timo.dornhoefer@student.uni-siegen.de

zu senden. Ca. eine Woche später werden zur Übungszeit die Lösungen im CIP-Pool besprochen und präsentiert. Jeder sollte dabei in der Lage sein, seine bearbeiteten Aufgaben zu präsentieren und zu erläutern. Der genaue Termin für die Besprechung der praktischen Aufgaben wird in der Vorlesung bekannt gegeben.

Überbestimmte Gleichungssysteme

7. Gegeben sei eine Matrix A mit den Elementen $a_{jk},\ j = 1,\dots,N,\ k = 1,\dots,n$ mit N Zeilen und n Spalten, $n \leq N$. Bestimmen Sie zu $b = (b_1 \dots, b_N)$ die Lösung $z = (z_1,\dots,z_n)$ des überbestimmten Gleichungssystems $Ax = b$ nach der **Methode des kleinsten Fehlerquadrats.**

Die Lösung z des Gleichungssystems $Ax = b$ kann mit Hilfe der Orthogonalisierung der Spaltenvektoren $a_1,\dots,a_n$ der Matrix A unter Verwendung des euklidischen Skalarprodukts und der zugehörigen euklidischen Norm wie folgt erhalten werden:

Sind $v_1,\dots,v_n$ die aus $a_1,\dots,a_n$ durch das Orthogonalisierungsverfahren entstehenden Vektoren und sind $w_1 \dots, w_n$ die zugehörigen orthonormierten Vektoren,

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 &&,\quad w_1 = \frac{1}{||v_1||}\, v_1\ , \\ v_j &= a_j - \sum_{k=1}^{j-1} (a_j, w_k) w_k &&,\quad w_j = \frac{1}{||v_j||}\, v_j\ ,\ j = 2,\dots,n\ , \end{aligned}$$

so erhält man $z = (z_1, \ldots, z_n)$ gemäß

$$z_n = \frac{1}{||v_n||}\ (b, w_n),\ z_j = \frac{1}{||v_j||} \left\{ (b, w_j) - \sum_{k=j+1}^{n} z_k (a_k, w_j) \right\},\ j = n-1, \ldots, 1.$$

Wählen Sie für A die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 7 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

und als rechte Seite b die Vektoren $e^{(1)} = (1,0,0,0,0)$, $e^{(2)} = (0,1,0,0,0) \ldots$, $e^{(5)} = (0,0,0,0,1)$. Drucken Sie jeweils $v_j, w_j (j = 1, \ldots, 4)$ und die Lösungen $z^{(k)}$ von $Ax = e^{(k)}$ sowie die Defekte $d^{(k)} = Az^{(k)} - e^{(k)}$ und die Fehlernorm $||d^{(k)}||_2$.

8. Es sei f eine Funktion auf dem Intervall $[-1, +1]$, und es seien M und n natürliche Zahlen sowie $h = \dfrac{1}{M}$, $x_j = jh,\ y_j = f(x_j),\ j = 0, \pm 1, \ldots, \pm M.$
Gesucht ist die Ausgleichsparabel nach der **Methode der kleinsten Quadrate**

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k u_k \text{ mit } u_k(x) = x^{k-1},\ k = 1, \ldots, n.$$

Die Koeffizienten γ_k werden aus dem Gleichungssystem bestimmt

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k (a_k, a_j) = (y, a_j),\ j = 1, \ldots, n,$$

mit dem Skalarprodukt $(r, s) = \sum\limits_{j=-M}^{M} r_j s_j$ und den Vektoren

$$\begin{aligned} a_k &= \Big(u_k(x_{-M}), \ldots, u_k(x_0), \ldots, u_k(x_M)\Big),\ k = 1, \ldots, n, \\ y &= (y_{-M}, \ldots, y_0, \ldots, y_M). \end{aligned}$$

Sind $v_1, \ldots, v_n$ die Vektoren, die aus $a_1, \ldots, a_n$ durch das Orthogonalisierungsverfahren entstehen, und sind $w_1, \ldots, w_n$ die zugehörigen orthonormierten Vektoren, dann erhält man die Koeffizienten γ_k rekursiv gemäß

$$\gamma_n = \frac{1}{||v_n||}(y, w_n),\ \gamma_j = \frac{1}{||v_j||} \left\{ (y, w_j) - \sum_{k=j+1}^{n} \gamma_k (a_k, w_j) \right\},\ j = n-1, \ldots, 1.$$

Berechnen und drucken Sie jeweils für $M = 10$ und $n = 2, 5, 10$

$$d = \max_{-M \le j \le M} |p_n(x_j) - y_j| \text{ und } \gamma_k,\ k = 1, \ldots, n,$$

sowie für $x = -1(0.05)+1$

$$x \qquad f(x) \qquad p_n(x) \qquad p_n(x) - f(x)$$

für die Funktionen
$f(x) = e^{-x}$ und $f(x) = \sqrt{1+x}$.

Iterative Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme

Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ gestattet eine Zerlegung $A = L + D + R$ mit einer strikten unteren Dreiecksmatrix $L = L_A$, einer strikten oberen Dreiecksmatrix $R = R_A$ und einer Diagonalmatrix $D = D_A$. Sei ferner $E = E_n$ die Einheitsmatrix aus $\mathbb{R}^{n,n}$. Es gelte $a_{jj} \neq 0$ für alle j.
Benutzen Sie für die folgenden Aufgaben als Vektornorm die Maximumnorm

$$||x|| = ||x||_\infty = \max_{1 \le j \le n} |x_j|, \; x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

und die maximale Zeilensummennorm als zugehörige Matrixnorm

$$||A|| = ||A||_\infty = \max_{1 \le j \le n} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|, \; A = (a_{jk})_{(n,n)} \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Die Aufgaben 9 und 10 sollen mit folgenden Matrizen und rechten Seiten gerechnet werden:

$$A = S, \; b = (1,0,1,1,0,1)^\top \text{ und } A = H, \; b = (1,-1,-1,1)^\top$$

9. Berechnen Sie iterativ Näherungslösungen des Gleichungssystems $Ax = b$ mit Hilfe des **Gesamtschrittverfahrens** $Dx^{(t+1)} = b - (A-D)x^{(t)}$, also

$$x_j^{(t+1)} = \frac{1}{a_{jj}} \left(b_j - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} a_{jk} x_k^{(t)} \right), \; j = 1, \dots, n, \; t = 0, 1, 2, \dots,$$

mit den Fehlerabschätzungen

$$||x^{(t)} - x|| \le \frac{q}{1-q} ||x^{(t)} - x^{(t-1)}|| \le \frac{q^t}{1-q} ||x^{(1)} - x^{(0)}||, \; t = 1, 2, 3, \dots \; .$$

Hierbei ist $q := ||D^{-1}(A-D)|| = \max_{1 \le j \le n} \left(\frac{1}{|a_{jj}|} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} |a_{jk}| \right)$.
Berechnen und drucken Sie q sowie für $t = 1, 2, \dots$

$$||Ax^{(t)} - b||, \; \frac{q}{1-q} ||x^{(t)} - x^{(t-1)}||, \; \frac{q^t}{1-q} ||x^{(1)} - x^{(0)}||.$$

Brechen Sie die Rechnung ab, wenn gilt $\frac{q}{1-q} ||x^{(t)} - x^{(t-1)}|| \le 5 \times 10^{-7}$; führen Sie jedoch höchstens 100 Iterationen aus. Ferner drucken Sie die zuletzt berechnete Näherung $x^{(t)}$. Als Startwert $x^{(0)}$ wählen Sie jeweils den Nullvektor.

---

10. Berechnen Sie iterativ Näherungslösungen des Gleichungssystems $Ax = b$ mit Hilfe des **Einzelschrittverfahrens** $(L+D)x^{(t+1)} = b - Rx^{(t)}$, also

$$x_j^{(t+1)} = \frac{1}{a_{jj}} \left(b_j - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk} x_k^{(t+1)} - \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk} x_k^{(t)} \right), \; j = 1, \ldots, n, \; t = 0, 1, 2, \ldots$$

mit den Fehlerabschätzungen

$$||x^{(t)} - x|| \le \frac{q}{1-q} ||x^{(t)} - x^{(t-1)}|| \le \frac{q^t}{1-q} ||x^{(1)} - x^{(0)}||, \; t = 1, 2, \ldots,$$

wobei

$$q_1 = \frac{1}{|a_{11}|} \sum_{k=2}^{n} |a_{1k}|, \; q_j = \frac{1}{|a_{jj}|} \left\{ \sum_{k=1}^{j-1} |a_{jk}| q_k + \sum_{k=j+1}^{n} |a_{jk}| \right\}, \; j = 2, \ldots, n;$$
$$q := \max_{1 \le j \le n} q_j.$$

Berechnen und drucken Sie $q, q_j, \; j = 1, \ldots, n$ sowie für $t = 1, 2, \ldots$

$$||Ax^{(t)} - b||, \; \frac{q}{1-q} ||x^{(t)} - x^{(t-1)}||, \; \frac{q^t}{1-q} ||x^{(1)} - x^{(0)}||.$$

Brechen Sie die Rechnung ab, wenn gilt $\frac{q}{1-q} ||x^{(t)} - x^{(t-1)}|| \le 5 \times 10^{-7}$; führen Sie jedoch höchstens 50 Iterationen aus. Ferner drucken Sie die zuletzt berechnete Näherung $x^{(t)}$. Als Startwert $x^{(0)}$ wählen Sie jeweils den Nullvektor.

$$H = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 8 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 8 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 8 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$