Prof. Dr. H.–J. Reinhardt **Dept. Mathematik**
Univ. Siegen

Theoretische Übungen (1) zur Vorlesung „Numerik I“ im Wintersemester 2011/2012

(Abgabetermin: Donnerstag, 20.10.11, 12 Uhr)

1. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass
$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

2. Untersuchen Sie die angegebenen Zahlenfolgen auf Beschränktheit, Konvergenz und Divergenz, und geben Sie (bei Konvergenz) den Limes an:

   a) $a_n = (-1)^n \dfrac{n^2 - n + (-1)^n}{3n^3 - 4n + 5}\,,\ n \in \mathbb{N}\,;$

   b) $b_1 = 0,\ b_{n+1} = \dfrac{b_n}{2} + 2,\ n \in \mathbb{N}\,;$

   c) $c_n = i^n + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}\,.$ $\qquad$ (i = imaginäre Einheit)

3. Entscheiden Sie bei den folgenden Reihen, ob sie konvergieren (mit Begründung):

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3}{n}\right)^9$

   b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+9}$

   c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{9n}\right)^n$

4. Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Funktionen $f_k\,, k = 1,2,3$, definiert und wo sind sie differenzierbar? Man berechne dort auch jeweils die erste Ableitung!

   a) $f_1(x) = \frac{ax+b}{cx+d}\,,\ a,b,c,d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc = 1$

   b) $f_2(x) = \ln\big(\cos(x)\big)$

   c) $f_3(x) = \big(\arctan(x)\big)^2$

5. Bestimmen Sie für die angegebenen Polynome und Zahlen x_0 mittels des allgemeinen Horner–Schemas die zugehörigen Polynome $p_4, \ldots, p_0$ und die Ableitungen $\frac{d^j p}{dx^j}(x_0)\,,\ 0 \le j \le 5$.

   a) $x_0 = 0.5, \quad p(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x\,,$

   b) $x_0 = i, \qquad p(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + x + 1 \quad (\text{mit } i^2 = -1)\,.$