

Theoretische Übungen (10)
zur Vorlesung „Numerik I“
im

Wintersemester 2011/12

(Abgabetermin: Donnerstag, 12.01.12, 12 Uhr)

(Alle Aufgaben sind Bonusaufgaben!)

24. (Natürliche Matrizenorm zur euklidischen Norm; nur für Mathematiker)

Zeigen Sie, dass für eine nicht notwendige symmetrische bzw. hermitesche Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ gilt

$$\|A\|_2 := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \text{sp}(A^*A)^{1/2}$$

Hinweis: Sie können benutzen, dass eine symmetrische bzw. hermitesche Matrix eine Orthonormalbasis $\{w_1, \dots, w_n\}$ von Eigenvektoren $w_j, j = 1, \dots, n$, besitzt.

25. (Quadratwurzeln einer positiv definiten Matrix)

Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

zeigen Sie, dass sie positiv definit ist, bestimmen Sie deren Eigenwerte und die exakten Quadratwurzeln.

Hinweis:

- 1) (zur positiven Definitheit) Mit Hilfe der Eigenwerte einer symm. Matrix A gilt

$$\lambda_{\min} \leq \frac{(Ax, x)_2}{\|x\|_2^2} \leq \lambda_{\max}.$$

- 2) Es gibt 4 (exakte) Quadratwurzeln von A .

26. (Gesamtschrittverfahren zur Berechnung von Quadratwurzeln einer positiv definiten Matrix; **nicht** für Mathematiker)

Für eine positiv definite Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ hat das Gesamtschrittverfahren zur Berechnung der Quadratwurzel W von A , d.h. $W^2 = A$, die Gestalt $X_t = \frac{1}{2}(X_{t-1}^2 + B)$, $t = 1, 2, \dots$, wobei $B = E - \sigma A$ und $0 < \sigma < 1/\lambda_{\max}$, $\lambda_{\max} = \max$. Eigenwert von A . Als Näherungen für die Quadratwurzeln W erhält man damit $W_t^\pm = \pm(E - X_t)/\sqrt{\sigma}$, $t = 1, 2, \dots$

Bekanntlich gelten für das Gesamtschrittverfahren die a-priori Fehlerabschätzungen

$$\|Z - X_t\|_\infty \leq \frac{q^t}{1-q} \|X_1 - X_0\|_\infty, \quad t = 1, 2, \dots,$$

wobei $q = \|B\|_\infty$, $Z = E - \sqrt{\sigma}W$. Führen Sie das obige Gesamtschrittverfahren für A aus Aufgabe 25 mit $X_0 = 0$, $\sigma = 4/25$ für $t = 1, 2$ durch. Vergleichen Sie außerdem die Differenz $W - W_2^\pm$ mit der Schranke der entsprechenden a-priori Fehlerabschätzung (bzgl. $\|\cdot\|_\infty$).

Hinweis: Wählen Sie geeignete Quadraturwurzeln in der Fehlerabschätzung.

Wir wünschen

Frohe Weihnachten und einen Guten Rutsch ins Jahr 2012!

Das Team der Numerik I
Prof. Dr. H-J. Reinhardt
Nicole Klein
Stefan Schuß

