Prof. Dr. H.–J. Reinhardt
Nicole Klein
Stefan Schuß

Dept. Mathematik
Univ. Siegen

Theoretische Übungen (11)
zur Vorlesung „Numerik I"
im
Wintersemester 2011/12
(Abgabetermin: Donnerstag, 17.01.12, 12 Uhr)

27. Es sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ eine symmetrische bzw. hermitesche Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Für eine Zahl $\mu \in \mathbb{R}$ und einen Vektor $x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0$, sei $d := Ax - \mu x$.

   a) Zeige die Abschätzung
   $$\min_{1 \leq j \leq n} |\mu - \lambda_j| \leq \frac{\|d\|_2}{\|x\|_2}\ .$$

   b) Welche Abschätzung ergibt sich aus a) für die Einheitsvektoren $x = e_k$ und $\mu = \rho_A(e_k)\,,\ k = 1, \ldots, n$?

   c) Wende das Ergebnis von b) auf die Matrix
   $$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$
   mit $\mu = 6$ bzw. $\mu = 7$ an. Welcher der Eigenwerte $\lambda_1 = 13\,,\ \lambda_2 = 4\,,\ \lambda_3 = 2$ wird durch diese μ approximiert?

   Hinweis: Verwende eine Orthonormalbasis $\{w_1, \ldots, w_n\}$ von Eigenvektoren.

28. Bestimmen Sie für die Matrix
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   die Eigenwerte und zugehörigen normierten Eigenvektoren. Bestimmen Sie dann weiter für die Potenzmethode die iterierten Vektoren $x^{(t)}, y^{(t)}, y^{(2t)}, y^{(2t+1)}, z_+^{(t)}, z_-^{(t)}$ mit $x^{(0)} = (1, 1, 1)$ sowie die Eigenwertnäherungen $\rho_A(z_+^{(t)}), \rho_A(z_-^{(t)})$ mit dem Rayleigh-Quotienten $\rho_A(x) = (Ax, x)_2 \,/\, \|x\|_2^2$. Gegen welche Eigenwerte konvergieren $\rho_A(z_\pm^{(t)})$?