

**Theoretische Übungen (2)**  
**zur Vorlesung „Numerik I“**  
im

Wintersemester 2011/12

(Abgabetermin: Donnerstag, 27.10.11, 12 Uhr)

6. Eine Fixpunktiteration  $x^{(t+1)} = f(x^{(t)})$  sei definiert durch

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad (x > 0)$$

- a) Verifizieren Sie für  $f : [1.75, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes. Wie groß ist die Kontraktionskonstante  $q$ ?
  - b) Geben Sie für  $x^{(0)} = 1.8$  mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes eine Fehler-schranke für  $|x^{(20)} - x^*|$  an ( $x^* = \text{Fixpunkt}$ ). Auf wie viele Stellen hinter dem Dezimalpunkt ist  $x^{(20)}$  korrekt?
7. Die Funktion  $\ln(x)$  soll an der Stelle  $x = a > 0$  näherungsweise berechnet werden. Dies kann beispielsweise mit dem Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle der Funktion

$$f(x) = e^x - a$$

geschehen. Geben Sie die zugehörige Iterationsvorschrift an. Geben Sie für  $a = 1$  ein geeignetes Intervall für den Startwert  $x_0$  an, so dass quadratische Konvergenz vorliegt. Berechnen Sie schließlich für  $a = 1$  und Startwert  $x_0 = 1$  die ersten vier Iterierten  $x_1, \dots, x_4$ . Auf wie viele Nachkommastellen genau stimmen diese mit dem tatsächlichen Wert  $0 = \ln(1)$  überein?