Prof. Dr. H.–J. Reinhardt
Nicole Klein
Stefan Schuß

Dept. Mathematik
Univ. Siegen

Theoretische Übungen (3)
zur Vorlesung „Numerik I“
im
Wintersemester 2011/12
(Abgabetermin: Donnerstag, 03.11.11, 12 Uhr)

8. Seien $x_0, \dots, x_m$ äquidistante Punkte der Gestalt $x_j = x_0 + jh\,,\ j = 0, \dots, m$, mit $h \neq 0$. Dann sind für beliebige Zahlen $y_0, \dots, y_m$ die *vorwärtsgenommenen Differenzen* $\Delta^k y_j$ erklärt durch die Vorschrift

$$\Delta^0 y_j := y_j\,;\ \Delta^k y_j := \Delta^{k-1} y_{j+1} - \Delta^{k-1} y_j\,, \quad j = 0, \dots, m-k\,,\ k = 1, \dots, m\,.$$

Durch einen Induktionsschluss beweise man, dass für die dividierten Differenzen (vgl. Stummel-Hainer, S. 53) gilt

$$y\,[x_j, \dots, x_{j+k}] = \frac{1}{k!h^k} \Delta^k y_j\,,\ j = 0, \dots, m-k\,,\ k = 0, \dots, m\,,$$

sowie

$$\Delta^k y_j = \sum_{t=0}^{k} (-1)^{k-t} \binom{k}{t} y_{j+t}\,.$$

Zusammen mit den Ausführungen in Stummel-Hainer, S. 60/61, ist damit gezeigt, dass sich die dividierten Differenzen für äquidistante Punkte sowohl mit den vorwärtsgenommenen als auch mit den rückwärtsgenommenen Differenzen darstellen lassen.

9. Man löse die Interpolationsaufgabe

$$p(x_i) = f_i\,,\ i = 1, 2$$

für ein Polynom der Gestalt $p(x) = a_0 + a_1 x^3$ und gebe eine Bedingung für die eindeutige Lösbarkeit dieser Aufgabe an.