Prof. Dr. H.–J. Reinhardt
Nicole Klein
Stefan Schuß

Dept. Mathematik
Univ. Siegen

Theoretische Übungen (4) zur Vorlesung „Numerik I“ im Wintersemester 2011/12

(Abgabetermin: Donnerstag, 10.11.11, 12 Uhr)

10. **(Quadratische Interpolation)**

Für eine Funktion $f \in C^3[a,b]$ ist ein quadratisches Polynom p gesucht, dass die Hermitesche Interpolationsaufgabe

$$p(a) = f(a),\ p'(a) = f'(a),\ p(b) = f(b) \qquad (*)$$

erfüllt. Setzt man $x_0 = a$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, $r_0 = 2$, $r_1 = 1$ $(m = r_0 + r_1 - 1 = 2)$, dann ergibt sich für p bekanntlich die Darstellung

$$p(x) = p(a) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2]$$

mit dem Restglied

$$R(x) = R_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{3!} f^{(3)}(\xi),\ \xi \in (a, b).$$

i) Zeigen Sie, dass man für p auch die folgende Darstellung erhält,

$$\begin{aligned} p(x) = {} & f(a) + (x - a)f'(a) \\ & + (x - a)^2 \left[\frac{f(b) - f(a)}{(b - a)^2} - \frac{f'(a)}{b - a}\right],\ x \in [a, b], \end{aligned}$$

und prüfen Sie dafür $(*)$ nach.

ii) Leiten Sie aus der allgemeinen Restglieddarstellung die Fehlerabschätzung

$$|R_2(x)| \le \frac{2}{81}\,(b - a)^3 \max_{s \in [a,b]} |f^{(3)}(s)|,\ x \in [a, b],$$

her.

11. **(Differenzenquotienten 1. Ordnung)**

Zeigen Sie, dass der Differenzquotient erster Ordnung unter Verwendung der angegebenen Stützstellen folgende Darstellung hat (Abk.: $f_j = f(x_j),\ x_j = x_0 + jh$)

a) $p'_{-1,0,1,2,}(x_0) = \frac{1}{6h}(-f_2 + 6f_1 - 3f_0 - 2f_{-1})$

b) Was ergibt sich für $p''_{-1,0,1,2,}(x_0),\ p'''_{-1,0,1,2}$ und $p^{(4)}_{-1,0,1,2}$?

Hinweis: Verwenden Sie die Newtonsche Darstellung des Interpolationspolynoms und differenzieren Sie. Sie können die Darstellung $y[x_j, \ldots, x_{j+k}] = \dfrac{1}{k!h^k} \sum_{t=0}^{k} (-1)^{k-t} \binom{k}{t} y_{j+t}$ für die dividierten Differenzen benutzen.