

Theoretische Übungen (5)
zur Vorlesung „Numerik I“
im

Wintersemester 2011/12

(Abgabetermin: Donnerstag, 17.11.11, 12 Uhr)

12. (Quadraturformel)

Zeigen Sie, dass (für $h := b - a$)

$$\int_a^b g(s) ds = h \left(\frac{1}{4} g(a) + \frac{3}{4} g\left(a + \frac{2}{3} h\right) \right) + \begin{cases} O(h^3), & \text{für } g \in C^2[a, b] \\ O(h^4), & \text{für } g \in C^3[a, b] \end{cases}$$

Hinweis: Wählen Sie speziell $x_0 = a$, $x_1 = a + \frac{2}{3} h$, $z_0 = 0$, $z_1 = \frac{2}{3}$, $m = 1$ bzw. für $m = 2$ noch $x_2 = x_1$, $z_2 = z_1$ in der allgemeinen Darstellung von Quadraturformeln, und benutzen Sie die allgemeine Fehlerabschätzung.

13. (Summierte Quadraturformeln)

(a) Sei $f : [0, 4\pi] \ni x \mapsto \sin(x)$ und das Integral $\int_0^{4\pi} f(x) dx$ werde durch die summierte Sehnentrapez- und die summierte Simpsonformel approximiert. Wie klein muss die Schrittweite h jeweils gewählt werden, um mit Hilfe der jeweiligen Restgliedabschätzungen sichern zu können, dass der Quadraturfehler weniger als 10^{-5} beträgt?

(b) Wie in (a), nur mit der Funktion $g : [0, 1] \ni x \mapsto \exp(x)$.

Hinweis: (a) lösen Teilnehmer mit gerader Matrikel Nr.; (b) mit ungerader Nr.