

Theoretische Übungen (9)
zur Vorlesung „Numerik I“
im

Wintersemester 2011/12

(Abgabetermin: Donnerstag, 15.12.11, 12 Uhr)

21. (Normen isomorpher Räume; nur für Mathematiker)

Seien U, V zwei isomorphe Vektorräume und

$$\Phi : U \mapsto V$$

ein entsprechender Isomorphismus. Weiter sei $\|\cdot\|^U$ eine Norm auf U . Dann wird durch

$$\|\cdot\|^V : \|v\|^V = \|\Phi^{-1}(v)\|^U$$

eine Norm auf V erklärt.

Hinweis: Ein Isomorphismus ist eine lineare, injektive und surjektive Abbildung.

22. (Gesamt- und Einzelschrittverfahren)

Es werde die Aufgabenstellung $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $x, b \in \mathbb{R}^n$ betrachtet. Zeigen Sie: Das Gauß-Seidel-Verfahren, aber nicht das Jacobi-Verfahren, konvergiert für

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

23. (Gesamt- und Einzelschrittverfahren;
für Informatiker als Ersatz für Aufg. 21)

Es werde die Aufgabenstellung $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $x, b \in \mathbb{R}^n$ betrachtet. Zeigen Sie: Das Jacobi-Verfahren, aber nicht das Gauß-Seidel-Verfahren, konvergiert für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Mit den Beispielen von Aufgabe 22 und 23 ist gezeigt, dass Aussagen der Form „Wenn das Einzelschrittverfahren konvergiert, dann konvergiert auch das Gesamtschrittverfahren“ – oder umgekehrt – NICHT gelten.