Prof. Dr. H.–J. Reinhardt **Dept. Mathematik**
Timo Dornhöfer **Univ. Siegen**

Theoretische Übungen (10) zur Vorlesung „Numerik I“ im Wintersemester 2014/2015

(Abgabetermin: Mittwoch, 17.12.14, 10:30 Uhr)

26. **(Ausgleichsgerade)**

Zu den Messwerten

x_i	0	1	2	3	4
y_i	0.5	0.5	2	3.5	4

soll eine Gerade $g(x) = \alpha + \beta x$ so bestimmt werden, dass

$$\sum_{i=1}^{5} |y_i - g(x_i)|^2 \ \big(=: \rho(\alpha, \beta)\big)$$

minimal wird — d. h. man berechne die optimalen Parameter α und β nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate.

Hinweis: Sie können die Aufgabe entweder mit Hilfe des Orthogonalisierungsverfahrens (s. Stummel-Hainer, §7) oder durch Lösung der Normalgleichung oder durch Minimierung von $\rho(\alpha, \beta)$ (i.e. Nullsetzen von *grad* ρ) lösen. Bei Letzterem müssen Sie sich noch vergewissern, dass tatsächlich ein Minimum vorliegt.

27. **(Diskrete harmonische Analyse)**

Bestimmen Sie das trigonometrische Ausgleichspolynom

$$p(x) = \frac{1}{2}\gamma_1 + \gamma_2 \sin(x) + \gamma_3 \cos(x)\,.$$

zu den Werten

$$y_j = 1\,,\ j = 1, 2, y_3 = 0,\ y_j = -1,\ j = 4, 5, 6$$

und äquidistanten Punkten $x_j = -\pi + \dfrac{j}{3}\pi\,,\ j = 1, \ldots, 6,$

28. **(Spektralradius, Bonusaufgabe 4 Punkte)**

Sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ eine quadratische Matrix und $sp(A) := \max |\lambda(A)|$ der *Spektralradius* von A. Zeigen Sie: Für eine symmetrische bzw. hermitesche Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ ist der Spektralradius die natürliche Matrixnorm zur Euklidischen Norm $\|.\|_2$, d.h.

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = sp(A)$$

Hinweis: Sie können verwenden, dass es für symmetrische bzw. hermitesche Matrizen ein Orthonormalsystem $\{w_1, \ldots, w_n\}$ von Eigenvektoren zu reellen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gibt, und dass $|\lambda| \leq \|A\|$ für alle Eigenwerte λ von A und jede verträgliche Matrixnorm.