Prof. Dr. H.–J. Reinhardt **Dept. Mathematik**
Timo Dornhöfer **Univ. Siegen**

Theoretische Übungen (11) zur Vorlesung „Numerik I“ im Wintersemester 2014/2015

(Abgabetermin: Mittwoch, 14.01.15, 10:30 Uhr)

29. **(Konvergenz von Gesamt- und Einzelschrittverfahren)**

Es werde die Aufgabenstellung $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $x, b \in \mathbb{R}^n$ betrachtet. Zeigen Sie:

a) **(4 Punkte)** Das Einzelschrittverfahren (oder Gauß–Seidel-Verfahren), aber nicht das Gesamtschrittverfahren (oder Jacobi-Verfahren), konvergiert für

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

b) **(Bonusaufgabe: 4 Punkte)** Das Gesamtschrittverfahren, aber nicht das Einzelschrittverfahren, konvergiert für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Vorbemerkungen: Falls alle Diagonalelemente $a_{j,j} \neq 0$ sind, ist die Lösung von $Ax = b$ mit den Bezeichnungen

$$D := \operatorname{diag}(a_{j,j})_{j=1,\dots,n}\,,\; c := D^{-1}b\,,\; B := -D^{-1}(A - D)$$

wegen

$$\begin{aligned} Ax = b \iff & D^{-1}Ax = D^{-1}b \\ \iff & (E + D^{-1}(A - D))x = c \\ \iff & (E - B)x = c \end{aligned}$$

äquivalent zur Lösung der Gleichung

$$x - Bx = c\,.$$

Hierfür hat man das Ergebnis, dass das Jacobi-Verfahren genau dann konvergiert, wenn die Potenzen der Matrix B eine Nullfolge bilden (vgl. z. B. Stummel-Hainer, 8.1.1). Dies ist darüberhinaus äquivalent dazu, dass der *Spektralradius*

$$sp(B) =: max_{\lambda\in\sigma(B)}|\lambda|,\; \sigma(B) := \{\lambda|\lambda \text{Eigenwert von } B\} = \text{Spektrum von } B$$

kleiner als eins ist.

Weiter ist das Gauß–Seidel-Verfahren äquivalent einem Jacobi-Verfahren mit der Iterationsmatrix

$$C = (E - L)^{-1}R$$

mit der Zerlegung

$$B = L + R\,,$$

wobei L eine (echte) untere Dreiecksmatrix und R eine obere Dreiecksmatrix ist (vgl. z. B. Stummel-Hainer, 8.2.1).

Zur Lösung der Aufgabe sind also die Iterationsmatrizen B bzw. C des Jacobi- bzw. Gauß–Seidel-Verfahrens zu bestimmen und daraufhin zu untersuchen, ob ihre Potenzen eine Nullfolge bilden.

30. **(Quadratwurzeln positiv definiter Matrizen)**

Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 20 & -4 \\ -4 & 20 \end{pmatrix}$$

zeigen Sie, dass sie positiv definit ist, bestimmen Sie deren Eigenwerte und die exakten Quadratwurzeln.

Hinweise:

1) (zur positiven Definitheit) Mit Hilfe der Eigenwerte einer symm. Matrix A gilt

$$\lambda_{\min} \le \frac{(Ax, x)_2}{\|x\|_2^2} \le \lambda_{\max}\,.$$

2) Es gibt 4 (exakte) Quadratwurzeln von A. Machen Sie den Ansatz $W = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und zeigen Sie zunächst, dass $a = d$ und $b = c$ ist.