Prof. Dr. H.–J. Reinhardt **Dept. Mathematik**
Timo Dornhöfer **Univ. Siegen**

Theoretische Übungen (12) zur Vorlesung „Numerik I“ im Wintersemester 2014/2015

(Abgabetermin: Mittwoch, 21.01.15, 10:30 Uhr)

31. **(Fixpunktiteration; Bonusaufgabe)**

Gegeben sei für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ die Fixpunktgleichung

$$x = F(x)$$

mit der auf $G = [1-\delta, 1+\delta]^2$, $0 < \delta \le 1$ definierten Funktion

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 - hx_1x_2^2 \\ 1 + 2hx_1^2x_2 \end{pmatrix} \ , \ h > 0 \quad .$$

a) **(4 Punkte)** Geben Sie eine Bedingung für h in Abhängigkeit von δ an, so dass für jeden Startvektor $x^0 \in G$ die Fixpunktiteration $x^t = F(x^{t-1})$, $t = 1, 2, \ldots$ konvergiert.

b) **(2 Punkte)** Was liefert das Iterationsverfahren für $\delta = 1$, $h = 0.5$ und $x^0 = (1, 1)$?

Hinweis: Sie müssen h so wählen, dass F eine kontrahierende Abbildung von G in sich darstellt.

32. **(Rayleigh-Quotient)**

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und die durch den Rayleigh-Quotienten definierte Abbildung sei

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \ , \qquad x \longmapsto \frac{(Ax, x)_2}{\|x\|_2^2} (=: \rho_A(x)) \ .$$

Zeigen Sie:

a) **(2 Punkte)** Für $\hat{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist $f'(\hat{x}) = 0$ genau dann, wenn $\hat{x}$ Eigenvektor der Matrix $\frac{1}{2}(A + A^*)$ zum Eigenwert $f(\hat{x})$ ist. ($A^* = A^\top$ = adjungierte bzw. transponierte Matrix.)

b) **(2 Punkte)** Ist A symmetrisch mit den Eigenwerten $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n$, so gilt

$$\lambda_1 = \max_{x \neq 0} f(x) \qquad \text{und} \qquad \lambda_n = \min_{x \neq 0} f(x) \ .$$

c) **(Bonusaufgabe: 2 Punkte)** Für $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt

$$\inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \|Ay - \sigma y\|_2 = \|Ay - f(y)y\|_2 \ .$$

Hinweise: In a) müssen Sie den Gradienten $f'(x)$ berechnen und null setzen. In b) können Sie den Hinweis 1) von Aufgabe 30 benutzen.