Prof. Dr. H.–J. Reinhardt **Dept. Mathematik**
M.Sc. Max Kontak **Univ. Siegen**

Theoretische Übungen (2)
zur Vorlesung „Numerik I“
im
Wintersemester 2014/2015
(Abgabetermin: Mittwoch, 22.10.14, 10:30 Uhr)

6. Zeigen Sie, dass der n-te Partialbruch

$$s_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1+} \frac{a_2}{b_2+} \frac{a_3}{b_3+} \cdots \frac{a_n}{b_n}$$

einer Kettenbruchentwicklung auch durch die folgende Rechenvorschrift erhalten werden kann:

$$s_n = \frac{A_n}{B_n}\,, \quad A_0 = b_0\,, \quad A_1 = a_1 + b_0 b_1\,,$$
$$B_0 = 1\,, \quad B_1 = b_1\,,$$
$$A_k = b_k A_{k-1} + a_k A_{k-2}\,; \quad B_k = b_k B_{k-1} + a_k B_{k-2}\,, \quad k = 2, \ldots, n$$

(s. Stummel–Hainer, § 1.4).

Hinweis: Zeigen Sie zunächst durch vollständige Induktion (über j), dass

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{A_{n-j-1} + (a_{n-j}/b'_{n-j})A_{n-j-2}}{B_{n-j-1} + (a_{n-j}/b'_{n-j})B_{n-j-2}}\,, j = 0, 1, \ldots, n-2,$$

wobei $b'_n = b_n, b'_k = b_k + a_{k+1}/b'_{k+1}$, $k = n-1, \ldots, 0$.

7. Eine Fixpunktiteration $x^{(t+1)} = f(x^{(t)})$ sei definiert durch

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\ (x > 0)$$

   a) Verifizieren Sie für $f : [1.75, 2] \to \mathbb{R}$ die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes. Wie groß ist die Kontraktionskonstante q?
   b) Geben Sie für $x^{(0)} = 1.8$ mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes eine Fehlerschranke für $|x^{(20)} - x^*|$ an ($x^* =$ Fixpunkt). Auf wie viele Stellen hinter dem Dezimalpunkt ist $x^{(20)}$ korrekt?

8. Die Funktion $\ln(x)$ soll an der Stelle $x = a > 0$ näherungsweise berechnet werden. Dies kann beispielsweise mit dem Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle der Funktion

$$f(x) = e^x - a$$

geschehen. Geben Sie die zugehörige Iterationsvorschrift an. Geben Sie für $a = 1$ ein geeignetes Intervall für den Startwert x_0 an, so dass quadratische Konvergenz vorliegt. Berechnen Sie schließlich für $a = 1$ und Startwert $x_0 = 1$ die ersten vier Iterierten $x_1, \ldots, x_4$. Auf wie viele Nachkommastellen genau stimmen diese mit dem tatsächlichen Wert $0 = \ln(1)$ überein?

9. **(Bonusaufgabe: 2 Punkte)** Gegeben seien zwei Funktionen $h, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie für die Landauschen Symbole folgende Implikation:

$$h(x) = O\big(|x - x_0|^2\big)(x \longrightarrow x_0) \Longrightarrow h(x) = o\big(|x - x_0|\big)(x \longrightarrow x_0)$$