Prof. Dr. H.–J. Reinhardt **Dept. Mathematik**
M.Sc. Max Kontak **Univ. Siegen**

Theoretische Übungen (4) zur Vorlesung „Numerik I“ im Wintersemester 2014/2015

(Abgabetermin: Mittwoch, 05.11.14, 12:00 Uhr)

12. Lösen Sie die Interpolationsaufgabe

$$p(x_i) = f_i\,,\ i = 1, 2\,,$$

für ein Polynom der Gestalt $p(x) = a_0 + a_1 x^3$ und geben Sie eine Bedingung für die eindeutige Lösbarkeit dieser Aufgabe an.

13. Sei $f \in C^3[a, b]$ und p das quadratische Interpolationspolynom durch die Punkte $\big(x_i, f(x_i)\big)$, $i = 0, 1, 2$, wobei die äquidistanten Stützstellen x_i durch $a \le x_0 = -h < x_1 = 0 < x_2 = h \le b\,,\ h > 0$ gegeben sind. Zeigen Sie für den maximalen Interpolationsfehler die Abschätzung

$$\max_{x\in[x_0,x_2]} \big|f(x) - p(x)\big| \le \frac{M\sqrt{3}}{27} h^3\,,$$

wobei

$$M := \max_{x\in[x_0,x_2]} \big|f^{(3)}(x)\big|\,.$$

Hinweis: Sie können für das Restglied $R = f - p$ die folgende Darstellung verwenden (vgl. z. B. Stummel-Hainer, 3.2.2)

$$R(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{3!} f^{(3)}(\zeta) \ \text{ mit } \zeta \in [x_0, x_2]\,.$$

14. **(Bonusaufgabe)** Seien $x_0, \ldots, x_m$ äquidistante Punkte der Gestalt $x_j = x_0 + jh\,,\ j = 0, \ldots, m$, mit $h \neq 0$. Dann sind für beliebige Zahlen $y_0, \ldots, y_m$ die *vorwärtsgenommenen Differenzen* $\Delta^k y_j$ erklärt durch die Vorschrift

$$\Delta^0 y_j := y_j\,;\ \Delta^k y_j := \Delta^{k-1} y_{j+1} - \Delta^{k-1} y_j\,, \quad j = 0, \ldots, m - k\,,\ k = 1, \ldots, m\,.$$

Beweisen Sie, dass für die dividierten Differenzen (vgl. Stummel-Hainer, 3.1.2) gilt

$$y\,[x_j, \ldots, x_{j+k}] = \frac{1}{k!h^k} \Delta^k y_j\,,\ j = 0, \ldots, m - k\,,\ k = 0, \ldots, m\,,$$

sowie

$$\Delta^k y_j = \sum_{t=0}^{k} (-1)^{k-t} \binom{k}{t} y_{j+t}\,.$$

Hinweis: Beweisen Sie beide Behauptungen jeweils durch vollständige Induktion.
Bemerkung: Zusammen mit den Ausführungen in Stummel-Hainer, 3.2.3, ist damit gezeigt, dass sich die dividierten Differenzen für äquidistante Punkte sowohl mit den vorwärtsgenommenen als auch mit den rückwärtsgenommenen Differenzen darstellen lassen.