

Theoretische Übungen (5)
zur Vorlesung „Numerik I“
im

Wintersemester 2014/2015

(Abgabetermin: Mittwoch, 12.11.14, 10:30 Uhr)

ACHTUNG: Früher Abgabetermin!

15. (**Differenzenquotienten höherer Genauigkeit**) Zeigen Sie, dass die Ableitungen des Interpolationspolynoms durch 4 Stützstellen (zur Approximation der entsprechenden Ableitungen mit höherer Genauigkeit) unter Verwendung der angegebenen Stützstellen folgende Darstellungen haben (Abk.: $f_j = f(x_j)$, $x_j = x_0 + jh$)

a) $p'_{0,1,2,3}(x_0) = \frac{1}{6h}(2f_3 - 9f_2 + 18f_1 - 11f_0)$

b) $p''_{0,1,2,3}(x_0) = \frac{1}{h^2}(-f_3 + 4f_2 - 5f_1 + 2f_0)$

c) $p'''_{0,1,2,3}(x_0) = \frac{1}{h^3}(f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0)$

Was ergibt sich für $p_{0,1,2,3}^{(4)}$?

Hinweis: Verwenden Sie die Newton'sche Darstellung des Interpolationspolynoms und differenzieren Sie. Sie können außerdem das Ergebnis von Aufg. 14 verwenden.

16. (**Bonusaufgabe: Dividierte Differenzen**) Für $f \in C^3[a, b]$, $h := b - a$, zeigen Sie, dass

i) $f[a, b, a, b] = \frac{1}{h}(f[a, b, b] - f[a, b, a])$,

ii) $f[a, b, a] + f[a, b, b] = \frac{1}{h}(f'(b) - f'(a))$.

Hinweis: Verwenden Sie die Integraldarstellung der „dividierten Differenzen“ und partielle Integration.

17. (**Quadraturfehler**) Sei $f : [0, 2\pi] \ni x \mapsto \sin(x)$ und das Integral $\int_0^{2\pi} f(x) dx$ werde durch die summierte Sehnentrapez- und die summierte Simpsonformel approximiert. Wie klein muss die Schrittweite h jeweils gewählt werden, um mit Hilfe der jeweiligen Restgliedabschätzungen sichern zu können, dass der Quadraturfehler weniger als 10^{-5} beträgt?

Hinweis: Sie können die Restgliedabschätzungen aus Stummel-Hainer, 4.2., verwenden.