Prof. Dr. H.–J. Reinhardt **Dept. Mathematik**
Timo Dornhöfer **Univ. Siegen**

Theoretische Übungen (6)
zur Vorlesung „Numerik I“
im
Wintersemester 2014/2015
(Abgabetermin: Mittwoch, 19.11.14, 10:30 Uhr)

18. **(Quadratische Interpolation)**
Für eine Funktion $f \in C^3[a,b]$ ist ein quadratisches Polynom p gesucht, das die Hermitesche Interpolationsaufgabe

$$p(a) = f(a),\ p'(a) = f'(a),\ p(b) = f(b) \tag{$*$}$$

erfüllt. Setzt man $x_0 = a$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, $r_0 = 2$, $r_1 = 1\,(m = r_0 + r_1 - 1 = 2)$, dann ergibt sich für p bekanntlich die Darstellung (vgl. z. B. Stummel-Hainer, 3.2)

$$p(x) = p(a) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2]$$

mit dem Restglied

$$R(x) = R_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{3!} f^{(3)}(\xi),\ \xi \in (a, b).$$

i) Zeigen Sie, dass man für p auch die folgende Darstellung erhält,

$$\begin{aligned} p(x) = f(a) &+ (x - a)f'(a) \\ &+ (x - a)^2 \left[\frac{f(b) - f(a)}{(b - a)^2} - \frac{f'(a)}{b - a} \right],\ x \in [a, b]\,, \end{aligned}$$

und prüfen Sie dafür $(*)$ nach.

ii) Leiten Sie aus der allgemeinen Restglieddarstellung die Fehlerabschätzung

$$|R_2(x)| \le \frac{2}{81}\,(b - a)^3 \max_{s\in[a,b]} |f^{(3)}(s)|,\ x \in [a, b]\,,$$

her.

19. **(Spezielle Quadraturformel)**
Zeigen Sie, dass für eine hinreichend oft differenzierbare Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ (mit $h := b - a$) gilt

$$\int_a^b g(s)\,ds = h\left(\frac{1}{4}\,g(a) + \frac{3}{4}\,g(a + \frac{2}{3}\,h)\right) + \begin{cases} O(h^3), & \text{für } g \in C^2[a,b] \\ O(h^4), & \text{für } g \in C^3[a,b] \end{cases}$$

Hinweis: Wählen Sie speziell $x_0 = a$, $x_1 = a + \frac{2}{3}\,h$, $z_0 = 0$, $z_1 = \frac{2}{3}$, $m = 1$ bzw. für $m = 2$ noch $x_2 = x_1$, $z_2 = z_1$ in der allgemeinen Darstellung von Quadraturformeln, und benutzen Sie die allgemeine Fehlerabschätzung aus Stummel-Hainer, 4.1.1.