Prof. Dr. H.–J. Reinhardt **Dept. Mathematik**
Timo Dornhöfer **Univ. Siegen**

Theoretische Übungen (8)
zur Vorlesung „Numerik I“
im
Wintersemester 2014/2015

(Abgabetermin: Mittwoch, 03.12.14, 10:30 Uhr)

22. **(Konditionszahl einer Matrix)**

Zeigen Sie, dass für die *Konditionszahl* $\kappa(A) := \|A\|\,\|A^{-1}\|$ einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ bzgl. der verwendeten Matrixnorm gilt:

a) $\kappa(A) \geq 1$,

b) $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B)$,

c) $\kappa(cA) = \kappa(A)$ für alle $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

d) $\kappa_2(A) \leq \kappa_G(A) \leq n^2\kappa_\infty(A)$.

Hierbei bezeichnen die Indizes $2, \infty$ die folgenden zugrundeliegenden Matrixnormen: Quadratsummennorm, max. Zeilensumme.

Weiter bezeichnet man mit

$$\|A\|_G := n \cdot \max_{i,k} |a_{i,k}| \ .$$

die sogenannte *Gesamtnorm.*
Hinweis: Für Teil a) ist es zunächst sinnvoll, dass man $\|E\| \geq 1$ für die Einheitsmatrix E und eine beliebige Matrixnorm zeigt.

23. **(Gaußsches Eliminationsverfahren, Bonusaufgabe 2 Punkte)**

Beim Gaußschen Eliminationsverfahren ohne Zeilenvertauschung ergeben sich die reduzierten Matrizen $A_t = (a^t_{jk})_{j,k=t,\ldots,n}$ durch die Formeln

$$a^1_{jk} = a_{jk},\, a^{t+1}_{jk} = a^t_{jk} - \frac{a^t_{jt}a^t_{tk}}{a^t_{tt}}\ ,\ j,k = t+1,\ldots,n\ ,\ t = 1,\ldots,n-1\ .$$

Zeigen Sie: Ist $A_t = (a^t_{jk})_{j,k=t,\ldots,n}$ symmetrisch bzw. hermitesch, so ist auch $A_{t+1} = (a^{t+1}_{jk})_{j,k=t+1,\ldots,n}$ symmetrisch bzw. hermitesch.
Hinweis: Beachten Sie, dass die Koeffizienten i. A. komplex sind.