Prof. Dr. H.–J. Reinhardt **Dept. Mathematik**
Timo Dornhöfer **Univ. Siegen**

Theoretische Übungen (9)
zur Vorlesung „Numerik I“
im
Wintersemester 2014/2015
(Abgabetermin: Mittwoch, 10.12.14, 10:30 Uhr)

24. **(Skalarprodukt, Orthogonalsystem)**

Sei N eine natürliche Zahl und E der Vektorraum aller reell- bzw. komplexwertigen Funktionen auf der äquidistanten Punktmenge

$$G_N = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| x = x_j = -\pi + \frac{2\pi}{N} j \,; \quad j = 1, \ldots, N \right\} .$$

Zeigen Sie:

a) Durch die Vorschrift

$$(u, v) = \sum_{j=1}^{N} u(x_j)\overline{v(x_j)} \,, \qquad \|u\| = \left(\sum_{j=1}^{N} \left| u(x_j) \right|^2 \right)^{1/2} ,$$

wird ein Skalarprodukt und die zugehörige Norm für E definiert.

b) Für jedes m mit $2m + 1 \leq N$ bilden die Funktionen $v_k(x) = e^{ikx}$, $x \in G_N$, $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm m$, ein Orthogonalsystem in E mit der Orthogonalitätsrelation

$$(v_j, v_k) = \sum_{t=1}^{N} e^{i(j-k)x_t} = N\delta_{jk}, j, k = 0, \pm 1, \ldots, \pm m \,.$$

c) **(Bonusaufgabe, 2 Punkte)** Für jedes m mit $2m+1 \leq N$ bilden auch die Funktionen $u_1(x) = 1$, $u_{2\ell} = \sin(\ell x)$, $u_{2\ell+1} = \cos(\ell x)$, $x \in G_N$, $\ell = 1, \ldots, m$, ein Orthogonalsystem in E mit der Orthogonalitätsrelation

$$(u_j, u_k) = 0, j \neq k,\ (u_j, u_j) = \frac{1}{2}(u_1, u_1) = \frac{N}{2} \,, j \neq 1,\ j, k = 1, \ldots, 2m + 1 \,.$$

Hinweise: Betrachten Sie in b) die Potenzen der komplexen Zahlen

$$z := \exp(2\pi i(j - k)/N) = \cos(2\pi(j - k)/N) + i \sin(2\pi(j - k)/N) \,.$$

Sie können benutzen, dass dafür die Formel der endlichen geometrischen Reihe gilt. In c) können Sie benutzen, dass $\cos(\ell x) = \frac{1}{2}(e^{i\ell x} + e^{-i\ell x})$, $\sin(\ell x) = \frac{1}{2i}(e^{i\ell x} - e^{-i\ell x})$.

25. **(Überbestimmte Gleichungssysteme)**

Lösen Sie das überbestimmte Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 2 \\ x_2 &= 3 \,, \end{aligned}$$

das heißt, minimieren Sie $\|Ax - b\|_2$ mit den Bezeichnungen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Hinweis: Es gibt drei Möglichkeiten der Lösung eines überbestimmten Gleichungssystems: Mit dem Orthogonalisierungsverfahren (s. z.B. Stummel-Hainer, 7.2), durch Lösen der Normalgleichung $A^*Az = A^*b$ oder durch Minimieren von $\rho(x) := \|Ax - b\|_2^2$ mit Methoden der Analysis II.