Prof. Dr. H.–J. Reinhardt

Dept. Mathematik
Univ. Siegen

Theoretische Übungen (1)
zur Vorlesung „Theorie und Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen"
im Sommersemester 2011

(Abgabetermin: Dienstag, 12.04.11, 15 Uhr)

1. **(Banachscher Fixpunktsatz)** Zur Berechnung der Nullstelle der Funktion

$$f(x) = x^2 - \ln x - 2,\ x \in (1, \infty)$$

mit Hilfe der Methode der sukzessiven Approximation bestimme man eine geeignete Iterationsfunktion und ein geeignetes Intervall $[a, b] \subset (0, \infty)$, so dass die Iterationsvorschrift in diesem gegen die Nullstelle konvergiert.

Hinweis: Schreiben Sie $f(x) = 0$ als Fixpunktgleichung um.

2. **(Differenzierbarkeit)**

Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Funktionen $f_k, k = 1, 2, 3$ definiert und wo sind sie differenzierbar? Man berechne dort auch jeweils die erste Ableitung.

a) $f_1(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1$
b) $f_2(x) = \ln(\cos(x))$
c) $f_3(x) = (\arctan(x))^2$.

3. **(Taylorsche Reihenentwicklung)**

Entwickeln Sie die Funktionen

$$\sin(x),\ e^x\ ,\ \ln(1 + x),\ (1 + x)^\alpha\ (\alpha \in \mathbb{R})$$

als Taylorreihen um die Stelle $x_0 = 0$. Geben Sie dafür einmal die allgemeine Form an und entwickeln Sie die Funktionen dann jeweils bis zur 3. Ordnung.

Entwickeln Sie auch die Funktion

$$f(x) = \lambda(x^2 - F^2)^2$$

um ein Minimum bis zur 4. Ordnung (λ und F sind reelle Zahlen).

4. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen **wahr** oder **falsch** sind. Für jede richtige Antwort gibt es 0,5 Punkte, für jede falsche werden 0,5 Punkte abgezogen. Auch wenn Sie nicht entscheiden, werden 0,5 Punkte abgezogen. Eine negative Gesamtpunktzahl kann jedoch nicht erreicht werden.

	wahr	falsch
a) Der zentrale Differenzenquotient 1. Ordnung approximiert die 1. Ableitung einer Funktion $f \in C^1[a,b]$ immer mit der Güte $O(h)$.	☐	☐
b) Die summierte Simpson-Formel approximiert das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ für eine hinreichend glatte Funktion f mit der (theoretisch) bestmöglichen Güte $O(h^4)$.	☐	☐
c) Die Quadratsummennorm $\|A\|_2 = \Big(\sum\limits_{j,k=1}^{n} \|a_{jk}\|^2\Big)^{1/2}$ ist die natürliche Matrizennorm zur euklidischen Norm.	☐	☐
d) Wenn das Gesamtschrittverfahren zur Lösung von $(E-B)z = c$ konvergiert, dann konvergiert auch das Einzelschrittverfahren.	☐	☐
e) Für eine $m \times n$-Matrix A, $m \geq n$, ist die Gramsche Matrix $C = (c_{jk}), c_{jk} = (a_k, a_j)_2$, $j,k = 1,\ldots,m$ regulär, wenn die Spaltenvektoren $a_k, k = 1,\ldots,n$, von A paarweise orthogonal sind.	☐	☐
f) Die Funktionalmatrix der Abbildung $f(x) = x + b,\ x \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^n$, ist $f'(x) = b$.	☐	☐