Prof. Dr. H.–J. Reinhardt

Dept. Mathematik
Univ. Siegen

Theoretische Übungen (11) zur Vorlesung „Theorie und Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen“ im Sommersemester 2011

Abgabetermin: Dienstag, 28.06.11, 15 Uhr

29. Betrachten Sie das Adams–Moulton-Verfahren mit Schrittzahl $s = 2$:

$$u_{j+2} - u_{j+1} = \frac{h}{12}\,(5f_{j+2} + 8f_{j+1} - f_j)\,, \quad j = 0, \ldots, N_h - 2\,.$$

a) Geben Sie die Lösung des Verfahrens für die Testgleichung $u' = \lambda u$, $u(0) = 1$ an; verwenden Sie die Startwerte $u_0 = 1, u_1 = e^{\lambda h}$ mit Schrittweite $h > 0$ und $\lambda = -1$.

b) Diskutieren Sie das Verhalten der Lösung für $h \longrightarrow 0$.

Hinweise: Bestimmen Sie zuerst die Wurzeln λ_1, λ_2 des charakteristischen Polynoms $\varphi(z) = \rho(z) - h\lambda\sigma(z)$ (für $\lambda = -1, h > 0$), und verwenden Sie dann den Ansatz $u_j = \alpha\lambda_1^j + \beta\lambda_2^j$. Die Koeffizienten α, β bestimmen sich aus den Startwerten u_0, u_1. Diskutieren Sie schließlich das Verhalten von u_j für $h \to 0$, j fest. (vgl. Lösung von Aufgabe B.12 im Buch [Rei])

30. Das Randwertproblem

$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in I = [a, b]\,,$$

mit gemischten Randbedingungen

$$\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = \eta_0,\ \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = \eta_1$$

werde auf einem Gitter $I_h = \{x = a + jh,\ j = 0, \ldots, N_h\}$, $N_h = (b - a)/h$, durch die zentralen Differenzenquotienten 1. und 2. Ordnung in der Differentialgleichung und durch den vorwärtsgenommenen bzw. rückwärtsgenommen Differenzenquotienten 1. Ordnung in den Randbedingungen bei $x = a$ bzw. $x = b$ approximiert. Stellen sie das zugehörige Gleichungssystem auf und geben Sie Bedingungen für dessen eindeutiger Lösbarkeit an.

Hinweise: Hier entsteht ein $(N_h + 1) \times (N_h + 1)$ – Gleichungssystem für die Unbekannten $u_0, u_1, \ldots, u_{N_h}$, wobei $u_j = u_h(x_j)$. Setzen Sie voraus, dass $\alpha_1 < 0, \beta_1 > 0$ und machen Sie Fallunterscheidungen für α_0 und β_0. Als Lösbarkeitskriterium verwenden Sie das schwache Zeilensummenkriterium.