Prof. Dr. H.–J. Reinhardt

Dept. Mathematik
Univ. Siegen

Theoretische Übungen (12)
zur Vorlesung „Theorie und Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen“
im Sommersemester 2011

Abgabetermin: Dienstag, 05.07.11, 15 Uhr

31. **(Konsistenz und Stabilität von Mehrschrittverfahren)**

Berechnen Sie die Konsistenzordnung des folgenden expliziten linearen Mehrschrittverfahrens,

$$3v_{j+4} - 3v_j = h(8f_{j+3} - 4f_{j+2} + 8f_{j+1}).$$

Ist es nullstabil?

32. **(Invers monotone Matrizen)**

Die Matrix $A = (a_{jk}) \in \mathbb{R}^{M\times M}$ heißt **invers monoton**, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^M$ aus der Eigenschaft $Ax \geq 0$ die Ungleichung $x \geq 0$ folgt. Zeigen Sie Folgendes:

(a) Die Matrix A ist invers monoton genau dann, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^M$ aus der Eigenschaft $Ax \leq 0$ die Ungleichung $x \leq 0$ folgt.

(b) Die Matrix A ist invers monoton genau dann, wenn A regulär ist und $A^{-1} \geq 0$ gilt.

(c) Die Matrix A sei invers monoton und für Vektoren $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^M$ und $b \in \mathbb{R}^M$ gelte

$$Ax_1 \leq b \leq Ax_2\,.$$

Dann gibt es genau einen Vektor $x \in \mathbb{R}^M$ mit den Eigenschaften $x_1 \leq x \leq x_2$ und $Ax = b$.

Hinweis: Definitionsgemäß ist $B = (b_{jk}) \geq 0$, wenn $b_{jk} \geq 0$ für alle j, k. Entsprechend für Vektoren.

33. **(Inverse Monotonie und positiver Typ)**

Sei A eine tridiagonale Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & & & 0 \\ b_1 & a_1 & c_1 & & & \\ 0 & b_2 & a_2 & c_2 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & b_{N-1} & a_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & & & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie:

$-A$ ist invers monoton, wenn die folgende „positiver Typ“ -Eigenschaft gilt:

$b_j > 0,\ c_j > 0,\ j = 1, \ldots, N-1$, und

$a_j + b_j + c_j \leq 0, j = 1, \ldots, N-1\,.$

Hinweis: Sie können benutzen, dass für A das diskrete Maximumprinzip gilt, d.h. wenn für $v = (v_0, \ldots, v_N)^\top \in \mathbb{R}^{N+1}$ mit $Av \geq 0$ die Bedingung

$$v_{j_*} = \max_{j=0,\ldots,N} v_j \quad \text{für einen Index} \quad 1 \leq j_* \leq N-1$$

und ein nicht negatives Maximum $v_{j_*} \geq 0$ gilt, so folgt $v_0 = v_1 = \ldots = v_N$.