Prof. Dr. H.–J. Reinhardt

Dept. Mathematik
Univ. Siegen

Theoretische Übungen (2)
zur Vorlesung „Theorie und Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen“
im Sommersemester 2011

(Abgabetermin: Dienstag, 19.04.11, 15 Uhr)

5. (a) Für das Anfangswertproblem

$$y' = (1 + |y|)^{-1} \text{ auf } [0, b], \quad y(0) = y_0 , \tag{1}$$

weisen Sie Existenz und Eindeutigkeit der Lösung nach.

(b) Seien y und v Lösungen der Differentialgleichung in (1) mit den Anfangswerten $y(0) = y_0$ beziehungsweise $v(0) = v_0$. Weisen Sie Folgendes nach:

$$|y(t) - v(t)| \leq e^t |y_0 - v_0| \quad \text{für} \ \ t \in [0, b] .$$

Hinweis:

zu a): Weisen Sie die globale Lipschitzbedingung für die Funktion $f(t, u)$ nach.

zu b): Benutzen Sie für Teil (b) das Gronwallsche Lemma.

Das *Gronwallsche Lemma* lässt sich wie folgt formulieren:

Die stückweise stetige Funktion $w(t) \geq 0$ genüge mit zwei Konstanten $a, b \geq 0$ der Integralungleichung

$$w(t) \leq a \int_{t_0}^{t} w(s)\, ds + b, \quad t \geq t_0 .$$

Dann gilt die Abschätzung

$$w(t) \leq e^{a(t-t_0)} b, \quad t \geq t_0 .$$

6. Formen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y_1'' &= t^2 - y_1' - y_2^2 , \\ y_2'' &= t + y_2' + y_1^3 , \\ y_1(0) = 0, \quad y_2(0) &= 1, \quad y_1'(0) = 1, \quad y_2'(0) = 0 \end{aligned}$$

in ein Anfangswertproblem für ein System erster Ordnung um.

7. **(Wronski-Determinante)**

Zeigen Sie für eine Differentialgleichung 2-ter Ordnung

$$u'' + p(t)u' + q(t)u = b(t) \ , \qquad t \in J = [\tau, \tau + a] \ ,$$

mit $p, q, b \in C(J)$, dass die *Wronski–Determinante* $W(t) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}$ für zwei Lösungen u_1, u_2 der zugehörigen homogenen Differentialgleichung selbst die Differentialgleichung erster Ordnung

$$W'(t) = -p(t)W(t) \ , \qquad t \in J \ ,$$

erfüllt und damit die Darstellung hat,

$$W(t) = W(\tau) \exp\left(- \int_{\tau}^{t} p(s) ds \right) \ , \qquad t \in J \ .$$