Prof. Dr. H.–J. Reinhardt

Dept. Mathematik
Univ. Siegen

Theoretische Übungen (3)
zur Vorlesung „Theorie und Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen“
im Sommersemester 2011

(Abgabetermin: Mittwoch, 27.04.11, 10 Uhr)
(ins Postfach, ENC, Gebäude B, 2. Stock)

8. **(Temperaturverteilung)**

Das Newtonsche Abkühl-Gesetz besagt, dass die Abkühlrate $T'(t)$ eines gut wärmeleitenden Körpers zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ proportional ist zur Differenz zwischen seiner Temperatur $T(t)$ und der Umgebungstemperatur T_a. Das heißt, es gilt

$$T'(t) = k\big(T(t) - T_a\big), \qquad t \in \mathbb{R}$$

mit einer Konstanten $k < 0$. Wie lange dauert es, bis ein (zum Zeitpunkt $t = 0$) $100°$ heißer Körper bei einer Außentemperatur von $T_a = 20°$ auf $30°$ abgekühlt ist, wenn er nach 20 Minuten ($t = 20$) noch eine Temperatur von $60°$ hat? Bestimmen Sie außerdem $\lim\limits_{t\to\infty} T(t)$.

Hinweise:

(i) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$T'(t) = k(T(t) - T_a)$$

mit der Anfangsbedingung $T(0) = 100°$.

(ii) Durch die Forderung $T(20) = 60°$ wird k bestimmt.

(iii) Bestimmen Sie dann noch den Zeitpunkt $\hat{t}$ mit $T(\hat{t}) = 30°$ sowie $\lim_{t\to\infty} T(t)$.

9. **(Bewegung mit Reibung)**

Ein Teilchen mit der Masse m bewegt sich auf einer Bahn $z(t)$, wobei $z|_{t=0} = z_0 > 0$ und $z'(t)|_{t=0} = 0$ die Anfangsbedingungen sind. Auf das Teilchen wirken entlang der z-Richtung die Gravitationskraft $F_g = -mg$ und die Reibungskraft $F_r = -\alpha z'$ (mit $\alpha > 0$, „Stokessche Reibung“). Nach den Gesetzen der Physik erfüllt das Teilchen bzw. dessen Bahn das Anfangswertproblem 2. Ordnung,

$$mz'' + \alpha z' = -mg\,,\ t > 0$$

$$z(0) = z_0\,, z'(0) = 0\,.$$

a) Berechnen Sie $z(t)$ und $z'(t)$.

b) Zeichnen Sie den Verlauf von $v(t) = z'(t)$.

c) Wie lautet der Limes $\lim_{t\to\infty} v(t)$?

10. **(Bonusaufgabe: ICE-Bremsweg)** Es soll der Bremsweg eines Zuges, z.B. ICE, bestimmt werden, der lediglich durch seine Rollreibung und den Luftwiderstand abgebremst wird. Gegeben seien folgende physikalische Größen,

	Maßeinheit	Daten
– Masse des Zuges m	$[t]$	450
– Stirnfläche A	$[m^2]$	11
– Luftwiderstandsbeiwert c_w	[-]	0,2
– Rollreibungswert μ	[-]	0,01
– Luftdichte ρ_L	$[kg/m^3]$	1,25
– Anfangsgeschwindigkeit v_0	$[km/h]$	300
entspricht:	$[m/s]$	83,33
– Erdbeschleunigung g	$[m/s^2]$	9,81

Aus einem Kräftegleichgewicht leitet man die folgende gewöhnliche Differentialgleichung für die Geschwindigkeit her,

(1) $$v'(t) - \frac{c_w A \rho_L}{2m}\, v^2(t) = -\mu g\ ,\ t > 0\,.$$

Dies ist eine nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung, die man in der Form

(2) $$v'(t) = Bv^2(t) - C,\ t > 0$$

mit $B = c_w A \rho_L/(2m), C = \mu g$ schreiben kann.

Gewöhnliche Differentialgleichungen der Form (2) sind Spezialfälle sogenannter Riccatischer Differentialgleichungen. Im vorliegenden Fall kann man die Lösung explizit angeben.

Durch die Transformation,

(3) $$u(t) = e^{-B\int v(t)\,dt} = e^{-Bx(t)}$$

mit $x(t) = \int v(t)\,dt$ = zurückgelegter Weg, geht (2) über in eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.

(4) $$u'' - \alpha^2 u = 0 \quad \text{mit } \alpha = \sqrt{BC}\,,$$

deren allgemeine Lösung durch

(5) $$u(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t}$$

gegeben ist. Die Koeffizienten c_1, c_2 bestimmen sich aus den Anfangsbedingungen.

Bestimmen Sie

- u aus den Anfangsbedingungen $x(0) = 0, v(0) = v_0$;
- x und v aus der Transformationsformel (3);
- eine Formel für den Zeitpunkt T, für den der Zug zum Stillstand kommt;
- für die obigen konkreten Daten den Zeitpunkt T und den Weg $x(T)$.

Bemerkung: Stellen Sie bei Ihren Umformungen sicher, dass diese auch möglich sind.