**Prof. Dr. H.–J. Reinhardt**

**Dept. Mathematik**
**Univ. Siegen**

# Theoretische Übungen (4)
# zur Vorlesung „Theorie und Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen“
# im Sommersemester 2011

**(Abgabetermin: Dienstag, 03.05.11, 15 Uhr)**

11. **(Umsatzrate)**

Nach Vidale und Wolfe steht die Umsatzrate $S(t)$, die durch den Verkauf eines Produktes zur Zeit $t > 0$ erzielt wird, mit der Investitionsrate $X(t)$ für Werbemaßnahmen in der Beziehung

$$S' = \rho X \left(1 - \frac{S}{m}\right) - \lambda S, \qquad S(0) = s_0 \,.$$

Hierbei ist $m$ eine maximale Umsatzrate, $\lambda$ eine Abnahmerate des Umsatzes und $\rho$ eine Verzögerungsrate der Wirkung der Werbemaßnahme. Ferner ist $s_0$ die Umsatzrate zu Beginn der Werbemaßnahme. Eine Firma plant eine Werbekampagne für ihr neustes Produkt. Aus der Erfahrung ist bekannt, dass mit $m = 1000$ €/Tag, $\lambda = 1$/Tag und $\rho = 10$/Tag gerechnet werden kann. Die Umsatzrate ohne Werbemaßnahme wird auf $s_0 = 100$ €/Tag geschätzt. Bestimmen Sie $S$ für die Werbestrategie $X(t) = x_0$ für $0 \leq t$ mit festem $x_0 \geq 0$. Skizzieren Sie die Lösungen für $x_0 = 0$ €/Tag, $x_0 = 100$ €/Tag und für $x_0 = 300$ €/Tag.

*Hinweise*

Das Vidale-Wolfe Modell stützt auf drei folgenden Ideen:

a) Steigende Werberaten bewirken ein Wachstum der Umsatzraten.
b) Je näher die Umsatzrate zum Sättigungspunkt heranwächst, desto langsamer wird das Wachstum der Umsatzrate.
c) Ohne Werbemaßnahme fällt die Umsatzrate.

12. **(Elektrisches Feld;)** (doppelte Punktzahl: a) 2 Punkte, b) 4 Punkte)

Ein Teilchen mit Masse $m$ und Ladung $q > 0$ bewege sich in einem elektrischen Feld $E$ (nur) in $x$-Richtung. Das elektrische Feld ist gegeben durch

$$E(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \text{ und } x > 2x_1 \,, \\ E_1 > 0 & \text{für } 0 \leq x \leq x_1 \,, \\ E_2 & \text{für } x_1 < x \leq 2x_1 \,, \end{cases}$$

wobei $E_1 \geq E_2$. Die Anfangsbedingungen seien $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$. Die Bewegungsgleichung für das Teilchen ist gegeben durch $m\ddot{x} = qE(x)$ (Bez.: $\dot{x} = x', \ddot{x} = x''$).

a) Zeigen Sie, dass man in den verschiedenen $x$-Bereichen die folgenden Differentialgleichungen erhält

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad & \dot{x}(t)^2 &= 0 && \text{für } x(t) \leq 0\,, \\
&(2) \qquad & \frac{m}{2}\dot{x}(t)^2 - x(t)qE_1 &= 0 && \text{für } 0 \leq x(t) \leq x_1\,, \\
&(3) \qquad & \frac{m}{2}\dot{x}(t)^2 - x(t)qE_2 &= x_1 q(E_1 - E_2) && \text{für } x_1 \leq x(t) \leq 2x_1\,, \\
&(4) \qquad & \frac{m}{2}\dot{x}(t)^2 &= x_1 q(E_1 + E_2) && \text{für } x(t) \geq 2x_1\,.
\end{aligned}
$$

*Hinweis:* Multipliziert man die gegebene Differentialgleichung 2. Ordnung skalar mit $\dot{x}$, dann ergibt sich

$$\int\limits_0^t m\ddot{x}\dot{x}ds = q\int\limits_0^t E(x)\dot{x}ds\,.$$

Wenden Sie dann rechts Variablensubstitution an und benutzen Sie, dass $\ddot{x}\dot{x} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x})^2$ ist.

b) Lösen Sie die Differentialgleichungen 1. Ordnung in den vier verschiedenen Bereichen.

*Hinweise:* Benutzen Sie die Methode der Trennung der Variablen. In jedem Bereich müssen auch die Anfangs- und Endzeitpunkte sowie die Anfangsbedingungen bestimmt werden. Für (2) bis (4) ergeben sich letztere aus den Endzuständen in den vorherigen Bereichen.