

**Theoretische Übungen (5)**  
**zur Vorlesung „Theorie und Numerik gewöhnlicher**  
**Differentialgleichungen“**  
**im Sommersemester 2011**  
**(Abgabetermin: Dienstag, 10.05.11, 15 Uhr)**

13. Bestimmen Sie die **Greensche Funktion** für die Randwertaufgabe

$$u''(x) = 0 \text{ in } [a, b], \quad u(a) = u(b) = 0,$$

für ein beliebiges Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $-\infty < a < b < \infty$ .

*Hinweis:* Sie können das Resultat von Beispiel A.26 benutzen, oder Sie geben die Greensche Funktion an und verifizieren die entsprechenden Eigenschaften.

14. Bestimmen Sie die **Greensche Funktion** der Randwertaufgabe

$$u''(x) + \frac{1}{x} u'(x) = 0 \text{ in } [1, 2], \quad u(1) = u(2) = 0.$$

*Hinweis:* Sie können  $x = e^t$  substituieren und das Ergebnis von Aufgabe 13 verwenden. Berücksichtigen Sie bei der Lösung der halbhomogenen Aufgabe (zur Bestimmung der Greenschen Funktion) die angegebene Variablensubstitution bei der Integration.

15. **(Gestörtes Randwertproblem)**

Für eine Funktion  $\varphi \in C[0, 1]$  betrachte man das Randwertproblem

$$(1) \quad u'' = \varphi(x), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Bekanntlich lässt sich dessen Lösung in der Form

$$u(x) = \int_0^1 G(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi, \quad x \in [0, 1],$$

schreiben mit der **Greenschen Funktion**

$$(2) \quad G(x, \xi) = \begin{cases} \xi(x-1), & \text{falls } \xi \leq x, \\ x(\xi-1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktionen  $u$  beziehungsweise  $u + \Delta u$  seien Lösungen des Randwertproblems (1) beziehungsweise der fehlerbehafteten Version

$$(u + \Delta u)'' = \varphi + \Delta \varphi, \quad (u + \Delta u)(0) = (u + \Delta u)(1) = 0,$$

mit  $\Delta \varphi \in C[0, 1]$  und  $|\Delta \varphi(x)| \leq \varepsilon$  für  $x \in [0, 1]$ . Zeigen Sie:  $|\Delta u(x)| \leq \varepsilon x(1-x)/2$  für  $x \in [0, 1]$ .