Prof. Dr. H.–J. Reinhardt **Dept. Mathematik**
Univ. Siegen

Theoretische Übungen (6)
zur Vorlesung „Theorie und Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen“
im Sommersemester 2011

Abgabetermin für theor. Übungen: Dienstag, 17.05.11, 15 Uhr
Abgabetermin für prakt. Übungen: Dienstag, 24.05.11, 15 Uhr)

16. **(Implizites verbessertes Verfahren von Euler-Cauchy)**

Das folgende Schema in Radau-Form

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2\,. \end{array}$$

hat als Verfahrensfunktion $f_h\bigl(t, u_h(t)\bigr) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\bigl(t, u_h(t)\bigr)$, wobei

$$k_1 = f\bigl(t, u_h(t)\bigr)\,,\ k_2 = f\bigl(t+h, u_h(t) + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)\bigr)\,.$$

Zeigen Sie:

a) Dieses Verfahren läßt sich als implizites Verfahren ähnlich dem verbesserten von Euler-Cauchy schreiben,

$$f_h\bigl(t, u_h(t)\bigr) = \frac{1}{2}\Bigl(f\bigl(t, u_h(t)\bigr) + f\bigl(t+h, u_h(t+h)\bigr)\Bigr)\,;$$

b) Das Verfahren hat Konsistenzordnung $p = 2$.

17. **(Polygonzug-Verfahren)**

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = t - t^3, \quad y(0) = 0\,.$$

Zur Schrittweite h sollen mit dem Polygonzug-Verfahren Näherungswerte u_j für $y(t_j), t_j = jh$, berechnet werden. Geben Sie $y(t_j)$ und u_j explizit an und zeigen Sie, dass an jeder Stelle t der Fehler $e_h(t) = u_h(t) - y(t), t = t_j$, für $h = t/N \to 0$ gegen Null konvergiert.

18. **(Praktische Aufgabe)**

Berechnen Sie Näherungslösungen für die Kippschwingung mit $\varepsilon = 0.1$, (s. [Rei], Beispiel 2.3 und 2.5) mit Anfangsbedingungen $u(0) = 0, u'(0) = 1$ mit den folgenden expliziten Verfahren:

(a) (Gruppe A) Verbessertes Polygonzugverfahren (m=2);

(b) (Gruppe B) Verbessertes Verfahren von Euler-Cauchy (m=2);

(c) (Gruppe C) Optimales Verfahren (m=2; vgl. [Rei], Beispiel. 2.19c);

(d) (Gruppe D) Einfache Runge–Kutta-Regel ($m = 3$) (s. [Rei], Bspl. 2.22).

Rechnen Sie als Vergleich auch (alle Teiln.) das klassische Runge–Kutta-Verfahren ($m = 4$) und vergleichen Sie die Differenz der numerischen Lösungen der beiden Verfahren; rechnen Sie mit Schrittweiten $h = 10^{-2}, 5 * 10^{-3}$. Rechnen Sie bis $T = 130$.

Tragen Sie dann in einer Grafik die zwei Lösungskurven für die Lösung u_h^1 des von Ihnen gerechneten Verfahrens sowie die Lösung y_h^1 des klass. Runge–Kutta-Verfahrens auf. Drucken Sie (Bezeichnungen wie in [Rei], Beispiel 2.5 und Aufg. C.1)

$$t, u_h^1(t),\ y_h^1(t),\ u_h^1(t) - y_h^1(t),\ u_h^2(t),\ u_h^2(t) - y_h^2(t)$$

in Schritten von 5.0.

Hinweise: Gruppenabgabe ist nicht möglich; Zusammenarbeit ist durchaus erwünscht.

Gruppe	Matrikel Nr.
A	767181, 855459
B	867010, 855132
C	825557, 818483
D	A. Weber