Prof. Dr. H.–J. Reinhardt

Dept. Mathematik
Univ. Siegen

Theoretische Übungen (7)
zur Vorlesung „Theorie und Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen"
im Sommersemester 2011

Abgabetermin: Dienstag, 24.05.11, 15 Uhr)

19. **(Konsistenz impliziter Verfahren; Bonusaufgabe)**

Zeigen Sie, ohne Benutzung der Formeln 1) - 8) von Beispiel 2.27 aus [Rei], dass das „implizite optimale Verfahren" (in Randau-Form)

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

Konsistenzordnung $p = 3$ hat, wobei hinreichende Differenzierbarkeit der Lösung des AWP's vorausgesetzt werden kann.

20. **(Lipschitz-Bedingung)**

Zeigen Sie, dass die einfache Runge–Kutta-Regel

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array}$$

Lipschitz-stetig ist, wenn die Bedingung

$$(L_0) \quad \big|f(x,y) - f(x,\tilde{y})\big| \le L_0|y - \tilde{y}| \; \forall (x,y), (x,\tilde{y}) \in G_\rho$$

erfüllt ist, wobei

$$G_\rho = \big\{(x,y) \in I \times \mathbb{K} \big| |y - u(x)| \le \rho, x \in I\big\}\,.$$

Hinweis: Zu zeigen ist: Es existieren $L \ge 0$ und $\rho_1, h_1 > 0$, so dass

$$\forall (t,y), (t,y') \in G_{\rho_1} \quad \forall h \le h_1 \;:\quad |f_h(t,y) - f_h(t,y')| \le L|y - y'|$$

mit analog zu G_ρ definiertem

$$G_{\rho_1} = \{(t,y) \in I \times \mathbb{K} |\, |u(t) - y| \le \rho_1\}\,.$$

L, ρ_1, h_1 können explizit angegeben werden. Vergleichen Sie auch die Lösung von Aufg. B.7 in [Rei]. Hier kann vorausgesetzt werden, dass $u \in C^2(I)$ ist.