

Theoretische Übungen (8)
zur Vorlesung „Theorie und Numerik gewöhnlicher
Differentialgleichungen“
im Sommersemester 2011
Abgabetermin: Dienstag, 31.05.11, 15 Uhr)

21. **(Stabilitätsfunktion)**

Zeigen Sie, dass

$$R_0(z) = \frac{1 + z/2}{1 - z/2}$$

die Stabilitätsfunktion des impliziten verbesserten Polygonzugverfahrens

$$u_h(t+h) = u_h(t) + h f\left(t + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(u_h(t) + u_h(t+h))\right)$$

ist.

22. **(Konsistenz)**

Das Einschrittverfahren für $y' = Ay$, $y(0) = y_0$ erfülle $\eta_{k+1} = R_0(hA)\eta_k$, $\eta_0 = y_0$, $R_0(\cdot)$ rationale Funktion, A diagonalisierbare $n \times n$ -Matrix mit Eigenwerten λ_ν und zugehörigen Eigenvektoren w_ν .

Zeigen Sie:

- a) (2 Punkte) Ist das Einschrittverfahren konsistent mit dem Anfangswertproblem, dann gilt $R_0(0) = 1$.
- b) (4 Punkte) Hat das Einschrittverfahren Konsistenzordnung p , dann gilt

$$R_0(z) = e^z + O(z^{p+1}) \quad (z \rightarrow 0)$$

Hinweise: Stellen Sie zuerst den Abschneidefehler mit Hilfe von $R_0(hA)$ dar. Sie können dann benutzen, dass für $\lambda =$ Eigenwert von A mit Eigenvektor w gilt: $R_0(h\lambda)$ ist Eigenwert von $R_0(hA)$ mit Eigenvektor w .