Prof. Dr. H.–J. Reinhardt

Dept. Mathematik
Univ. Siegen

Theoretische Übungen (9)
zur Vorlesung „Theorie und Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen“
im Sommersemester 2011

Abgabetermin für theor. Übungen: Mittwoch, 15.06.11, 10 Uhr (ins Postfach)
Abgabetermin für prakt. Übung: Dienstag, 21.06.11, 15 Uhr (per E-Mail an samuel.leweke@student.uni-siegen.de)

23. **(A-Stabilität; Bonusaufgabe)**

Zeigen Sie, dass die implizite Runge–Kutta Formel 2-ter Ordnung

$$y_k = y_{k-1} + \frac{1}{2}\,h\{k_1 + k_2\}, \quad k_1 = f(t_{k-1}, y_{k-1}), \quad k_2 = f(t_k, y_{k-1} + \frac{1}{2}\,hk_1 + \frac{1}{2}\,hk_2)\,,$$

A-stabil ist.

Hinweis: Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion $R_0(z)$ für dieses Verfahren und zeigen Sie, dass $|R_0(z)| \leq 1$ für alle $z : Re(z) \leq 0$.

24. **(Lösung impliziter Gleichungen bei Mehrschrittverfahren)**

Zur Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u''(t) = -20u'(t) - 19u(t), \quad t \geq 0\,, \quad u(0) = 1,\, u'(0) = -10\,,$$

soll das Milne–Simpson-Verfahren mit Schrittzahl $s = 3$

$$v_j = v_{j-2} + \frac{h}{3}\,(f_j + 4f_{j-1} + f_{j-2})$$

verwendet werden. Dazu formen Sie die Differentialgleichung zunächst in ein System erster Ordnung um. Wie klein muss dann die Schrittweite h bemessen sein, damit in jedem Zeitschritt die Konvergenz der Fixpunktiteration zur Berechnung von v_j garantiert ist?

25. **(Stabilitätsgebiet und Wurzelbedingung)**

Zeigen Sie: Für das Stabilitätsgebiet S des Mehrschrittverfahrens von Milne–Simpson mit Schrittzahl $s = 3$ gilt

$$S \cap (-\infty, 0) = \emptyset\,.$$

Das Milne–Simpson-Verfahren mit $s = 3$ ist in Aufgabe 24 erklärt.

(D.h. für $\mu < 0$ erfüllen die Nullstellen des „Stabilitätspolynoms“ $\varphi(z) = \rho(z) - \mu\sigma(z)$ nicht die Wurzelbedingung.

Definition: Für ein lineares MSV heißt die Menge der komplexen Zahlen $\mu (= h\lambda$ mit $h > 0)$, für die die „charakteristische Gleichung“ $\varphi(z) = 0$ nur Lösungen $z_j \in \mathbb{C}$ im Inneren des Einheitskreises besitzt, *Stabilitätsgebiet* S des MSV.

Hinweis:

i) Stellen sie die charakteristische Gleichung des Milne–Simpson-Verfahrens auf;

ii) Bestimmen Sie die Nullstellen für $\mu < 0$ und zeigen Sie, dass für mindestens eine Nullstelle z_j gilt: $|z_j| > 1$.

26. **(Praktische Aufgabe)**

Berechnen Sie Näherungslösungen für die Kippschwingung mit $\varepsilon = 0.1$ mit den folgenden Verfahren:

(a) (Gruppe C)
Extrapolationsverfahren von Adams ($s = 4$):

$$u_h(t_j) = u_h(t_{j-1}) + \frac{h}{24}\big(55f_{j-1} - 59f_{j-2} + 37f_{j-3} - 9f_{j-4}\big),$$

$$\text{mit } f_j = f\big(t_j, u_h(t_j)\big).$$

(b) (Gruppe B)
Prädiktor–Korrektor–Verfahren von Adams (s= 3)

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_h(t_j) &= u_h(t_{j-1}) + \frac{h}{12}\{23f_{j-1} - 16f_{j-2} + 5f_{j-3}\}, \\
u_h(t_j) &= u_h(t_{j-1}) + \frac{h}{24}\{9\tilde{f}_j + 19f_{j-1} - 5f_{j-2} + f_{j-3}\}, \quad j = 3, 4, \dots,
\end{aligned}$$

$$\text{mit } \tilde{f}_j = f\big(t_j, \tilde{u}_h(t_j)\big).$$

(c) (Gruppe A)
Prädiktor-Korrektor-Verfahren von Nyström und Milne ($s = 3$):

$$\tilde{u}_h(t_j) = u_h(t_{j-2}) + \frac{h}{3}\big(7f_{j-1} - 2f_{j-2} + f_{j-3}\big),$$

$$u_h(t_j) = u_h(t_{j-2}) + \frac{h}{3}\big(\tilde{f}_j + 4f_{j-1} + f_{j-2}\big),$$

$$\text{mit } \tilde{f}_j = f\big(t_j, \tilde{u}_h(t_j)\big).$$

Vergleichen Sie die numerische Lösung mit der numerischen Lösung des klassischen RK-Verfahrens.

Rechnen Sie mit Schrittweiten $h = 5 \cdot 10^{-2}, 10^{-2}, 5 \cdot 10^{-3}$, und starten Sie bei der Anfangsbedingung aus Aufg. 18. Rechnen Sie bis $T = 130$.

Als Anlaufrechnung für $t_j = h, 2h$ bzw. $3h$ verwenden Sie die Näherungslösungen des klassischen RK-Verfahrens.