Prof. Dr. H.–J. Reinhardt

Dept. Mathematik
Univ. Siegen

Theoretische Übungen (1)
zur Vorlesung „Numerik II“
im Sommersemester 2012

(Abgabe: Mittwoch, 18.04.12, 10 Uhr)

1. **(Taylorsche Reihenentwicklung)**

   a) Entwickeln Sie die Funktionen

   $$\cos(x),\ (1+x)^{\alpha}\ (\alpha \in \mathbb{R})$$

   als Taylorreihen um die Stelle $x_0 = 0$. Geben Sie dafür einmal die allgemeine Form an und entwickeln Sie die Funktionen dann jeweils bis zur 3. Ordnung.

   b) Entwickeln Sie auch die Funktion

   $$f(x) = \lambda(x^2 - F^2)^2$$

   um ein Minimum bis zur 4. Ordnung (λ und F sind reelle Zahlen).

2. **(System 1. Ordnung)**
   Formen Sie das Anfangswertproblem

   $$\begin{aligned} y_1'' &= t^2 - y_1' - y_2^2\,, \\ y_2'' &= t + y_2' + y_1^3\,, \\ y_1(0) = 0, \quad y_2(0) &= 1, \quad y_1'(0) = 1, \quad y_2'(0) = 0 \end{aligned}$$

   in ein Anfangswertproblem für ein System erster Ordnung um.

3. **(Wronski-Determinante)**
   Zeigen Sie für eine Differentialgleichung 2-ter Ordnung

   $$u'' + p(t)u' + q(t)u = b(t)\ , \qquad t \in J = [\tau, \tau + a]\ ,$$

   mit $p, q, b \in C(J)$, dass die *Wronski–Determinante* $W(t) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}$ für zwei Lösungen u_1, u_2 der zugehörigen homogenen Differentialgleichung selbst die Differentialgleichung erster Ordnung

   $$W'(t) = -p(t)W(t)\ , \qquad t \in J\ ,$$

   erfüllt und die Darstellung hat,

   $$W(t) = W(\tau)\exp\left(-\int_{\tau}^{t} p(s)ds\right)\ , \qquad t \in J\ .$$

4. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Für jede richtige Antwort gibt es 0,5 Punkte, für jede falsche werden 0,5 Punkte abgezogen. Auch wenn Sie nicht entscheiden, werden 0,5 Punkte abgezogen. Eine negative Gesamtpunktzahl kann jedoch nicht erreicht werden.

	wahr	falsch
a) Der zentrale Differenzenquotient 1. Ordnung approximiert die 1. Ableitung einer Funktion $f \in C^1[a,b]$ immer mit der Güte $O(h^2)$.	☐	☐
b) Die Taylorformel kann als Spezialfall der hermiteschen Interpolationsaufgabe verstanden werden.	☐	☐
c) Eine nicht-injektive Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ hat als Eigenwert Null mit einer Vielfachheit von mindestens Eins.	☐	☐
d) Eine Differentialgleichung der Form $y' = h$ ist immer eindeutig lösbar.	☐	☐