Prof. Dr. H.–J. Reinhardt | **Dept. Mathematik**
Univ. Siegen

Theoretische Übungen (2)
zur Vorlesung „Numerik II“
im Sommersemester 2012
(Abgabe: Mittwoch, 25.04.12, 10 Uhr)

5. **(Fehlerakkumulation)**

   Zeigen Sie folgendes Ergebnis:

   Für Zahlen $L > 0, a_\ell \geq 0, h_\ell > 0$ und $b \geq 0$ sei

   $$a_{\ell+1} \;\leq\; (1 + h_\ell L)a_\ell + h_\ell b, \quad \ell = 0, 1, \cdots, n-1\,,$$

   erfüllt. Dann gelten die Abschätzungen

   $$a_\ell \leq \big(\frac{e^{Lx_\ell} - 1}{L}\, b + e^{Lx_\ell} a_0\big) \quad \text{mit} \quad x_\ell := \sum_{j=0}^{\ell-1} h_j \quad (\ell = 0, \cdots, n).$$

6. **(Konvergenz des Polygonzug-Verfahrens)**

   Gegeben sei das Anfangswertproblem

   $$y' = t - t^3, \quad y(0) = 0\,.$$

   Zur Schrittweite h sollen mit dem Polygonzug-Verfahren Näherungswerte $u_\ell = u_h(t_\ell)$ für $y(t_\ell), t_\ell = \ell h$, berechnet werden. Geben Sie $y(t_\ell)$ und u_ℓ explizit an und zeigen Sie, dass an jeder Stelle t der Fehler für $h = t/n \to 0$ geben Null konvergiert.

7. **(Einfache Runge–Kutta-Regel)**

   Wenden Sie das Einschrittverfahren mit der Verfahrensfunktion

   $$\begin{aligned} f_h(t, y) &= \frac{1}{6}\,(k_1 + 4k_2 + k_3)(t, y)\,, \\ k_1(t, y) &= f(t, y),\ k_2(t, y) = f\big(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}\, k_1(t, y)\big)\,, \\ k_3(t, y) &= f\big(t + h, y + h(-k_1 + 2\,k_2)(t, y)\big) \end{aligned}$$

   auf das AWP $y' = \gamma\, y, t > 0, y(0) = y_0$, an, und geben Sie die Näherungslösungen $u_\ell = u_h(t_\ell)$, $t_\ell = \ell h$, explizit an.