Prof. Dr. H.–J. Reinhardt | **Dept. Mathematik**
Univ. Siegen

Übungsblatt (3)
zur Vorlesung „Numerik II“
im Sommersemester 2012

Abgabetermin für theor. Übungen: Donnerstag, 03.05.12, 10 Uhr
Abgabetermin für prakt. Übungen: Donnerstag, 10.05.12, 12 Uhr)

8. **(Implizites verbessertes Verfahren von Euler-Cauchy)**

   Das folgende Schema in Radau-Form

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2\,. \end{array}$$

   hat als Verfahrensfunktion $f_h\big(t, u_h(t)\big) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\big(t, u_h(t)\big)$, wobei

$$k_1 = f\big(t, u_h(t)\big)\,,\ k_2 = f\big(t+h, u_h(t) + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)\big)\,.$$

   Zeigen Sie:

   a) Dieses Verfahren läßt sich als implizites Verfahren ähnlich dem verbesserten von Euler-Cauchy schreiben,

$$f_h\big(t, u_h(t)\big) = \frac{1}{2}\Big(f\big(t, u_h(t)\big) + f\big(t+h, u_h(t+h)\big)\Big)\,;$$

   b) Das Verfahren hat Konsistenzordnung $p = 2$, wobei hinreichende Differenzierbarkeit der Lösung des AWP's vorausgesetzt werden kann.

9. **(Lineares Einschrittverfahren)**

   Zeigen Sie (durch vollständige Induktion), dass sich die Lösung des linearen Einschrittverfahrens (mit $n \times n-$ Matrizen C_m)

$$u_{m+1} = C_m u_m + h\, d_m, m = 0, \ldots, N-1\,,$$

   explizit darstellen läßt als

$$u_{m+1} = \prod_{\nu=0}^{m} C_\nu u_0 + h \sum_{\mu=0}^{m} \prod_{\nu=\mu+1}^{m} C_\nu d_\mu,\ m = 0, \ldots, N\,.$$

   Hierbei ist $\sum\limits_{\nu=n}^{m} C_\nu = 0$ und $\prod\limits_{\nu=n}^{m} C_\nu = I$, falls $n > m$.

10. **(Praktische Aufgabe)**

Berechnen Sie Näherungslösungen für die Kippschwingung mit $\varepsilon = 0.1$, (s. [Rei], Beispiel 2.3 und 2.5) mit Anfangsbedingungen $u(0) = 0, u'(0) = 1$ mit den folgenden expliziten Verfahren:

(Gruppe A) Verbessertes Verfahren von Euler-Cauchy (m=2);
(Gruppe B) Optimales Verfahren (m=2; vgl. [Rei], Beispiel. 2.19c);
(Gruppe C) Einfache Runge–Kutta-Regel ($m = 3$) (s. [Rei], Bspl. 2.22).

Rechnen Sie als Vergleich auch (alle Teiln.) das klassische Runge–Kutta-Verfahren ($m = 4$) und vergleichen Sie die Differenz der numerischen Lösungen der beiden Verfahren; rechnen Sie mit Schrittweiten $h = 10^{-2}, 5 * 10^{-3}$. Rechnen Sie bis $T = 130$.

Tragen Sie dann in einer Grafik die zwei Lösungskurven für die Lösung u_h^1 des von Ihnen gerechneten Verfahrens sowie die Lösung y_h^1 des klass. Runge–Kutta-Verfahrens auf. Drucken Sie (Bezeichnungen wie in [Rei], Beispiel 2.5 und Aufg. C.1)

$$t, u_h^1(t),\, y_h^1(t),\, u_h^1(t) - y_h^1(t),\, u_h^2(t),\, u_h^2(t) - y_h^2(t)$$

in Schritten von 5.0.

Hinweise: Gruppenabgabe ist nicht möglich; Zusammenarbeit ist durchaus erwünscht.

Gruppe	Matrikel Nr.
A	888374
B	864084
C	847467

Schicken Sie bis zum angegebenen Termin Ihre Lösung als Matlab- bzw. Octave-File an: samuel@leweke.info.