Prof. Dr. H.–J. Reinhardt

Dept. Mathematik
Univ. Siegen

Theoretische Übungen (4)
zur Vorlesung „Numerik II"
im Sommersemester 2012
(Abgabe: Donnerstag, 10.05.12, 10 Uhr)

11. **(Konsistenz impliziter Verfahren)**

Zeigen Sie anhand der Formeln

$$(+)\quad \sum_{k=1}^{m} \beta_{jk}\,\alpha_k^\ell \;=\; \frac{\alpha_j^{\ell+1}}{\ell+1},\quad \ell = 0,\dots,r-1,\; j = 1,\dots,m,$$

$$(++)\quad \sum_{k=1}^{m} \gamma_k\,\alpha_k^\ell \;=\; \frac{1}{\ell+1},\quad \ell = 0,\dots,p-1,$$

dass das Verfahren von Hammer und Hollingsworth in Gauß-Form,

$$\begin{array}{c|cc} \alpha_1 & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_2 & \beta_{21} & \beta_{22} \\ \hline & \gamma_1 & \gamma_2 \end{array} \quad = \quad \begin{array}{c|ll} (3-\sqrt{3})/6 & 1/4 & (3-2\sqrt{3})/12 \\ (3+\sqrt{3})/6 & (3+2\sqrt{3})/12 & 1/4 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Konsistenzordnung $p = 4$ hat.

Hinweis: Setzen Sie $m = r = 2$ und $p = 2m = 4$.

12. **(Lipschitz-Bedingung)**

Zeigen Sie, dass das verbesserte Polygonzugverfahren Lipschitz-stetig ist, wenn die Bedingung

$$(L_0)\quad \big|f(t,y) - f(t,\tilde{y})\big| \le L_0|y-\tilde{y}|\;\forall (t,y),(t,\tilde{y}) \in G_\rho$$

erfüllt ist, wobei

$$G_\rho = \big\{(t,y) \in I \times \mathbb{K} \big| |y - u(t)| \le \rho, t \in I\big\}\,.$$

Hinweis: Zu zeigen ist: Es existieren $L \ge 0$ und $\rho_1, h_1 > 0$, so dass

$$\forall (t,y),(t,y') \in G_{\rho_1} \quad \forall h \le h_1 \;:\quad |f_h(t,y) - f_h(t,y')| \le L|y-y'|$$

mit analog zu G_ρ definiertem

$$G_{\rho_1} = \{(t,y) \in I \times \mathbb{K} |\, |u(t) - y| \le \rho_1\}\,.$$

L, ρ_1, h_1 können explizit angegeben werden. Vergleichen Sie auch die Lösung von Aufg. B.7 in [Rei]. Hier kann vorausgesetzt werden, dass $u \in C^2(I)$ ist.

Zusätzlicher Hinweis: Sie erhalten die halbe Punktzahl, wenn Sie (L_0) global voraussetzen – und dann (L) auch entsprechend global zeigen.