Prof. Dr. H.–J. Reinhardt

Dept. Mathematik
Univ. Siegen

Theoretische Übungen (5)
zur Vorlesung „Numerik II“
im Sommersemester 2012

Abgabe: Montag, 21.05.12 (bis 12 Uhr ins Postfach)

13. **(Methode der Taylor-Entwicklung)**

Gegeben sei das AWP

$$u'(t) = 1 - u(t),\ 0 \le t \le 1,\ u(0) = 0$$

a) Bestimmen Sie die Lösung.

b) Bestimmen Sie für beliebiges p die Verfahrensfunktion für die Methode der Taylor-Entwicklung.

Hinweis zu a): Hier kann die Methode der Variation der Konstanten (s. [Rei], (A.12)) verwendet werden.

14. **(Methode der Taylor-Entwicklung, Forts.)**

Für ein äquidistantes Gitter $I_h = \{t_j = jh,\ j = 0, \ldots, N\}, h = 1/N$, bestimmen Sie für Aufgabe 13 im Fall $p = 2$ die Näherung $v_N = u_h(t_N)$ bei $t = T = 1$. Schätzen Sie anschließend den Fehler $v_N - u(t_N)$ ab und zeigen, dass $v_N - u(t_N) = O(h^2)$ ist.

15. **(Stabilität von Differentialgleichungen)**

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$u''(t) = -u(t),\ t > 0\,.$$

a) Schreiben Sie die Differentialgleichung um als ein System 1. Ordnung, $\underline{v}' = A\underline{v}$, und bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A.

b) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

c) Entscheiden Sie, ob das zugehörige AWP (mit $t_0 = 0$) stabil ist.

Hinweise:

zu b) Schauen Sie entweder in den Anhang A.3 oder finden Sie ein Fundamentalsystem einfach durch Hinschauen.

zu c) Sie können entweder Satz 2.40 benutzen oder Bedingung (2.42) elementar überprüfen.