Prof. Dr. H.–J. Reinhardt

Dept. Mathematik
Univ. Siegen

Theoretische Übungen (6)
zur Vorlesung „Numerik II“
im Sommersemester 2012

Abgabe: Montag, 11.06.12 (bis 12 Uhr ins Postfach)

16. **(Stabilität von Einschrittverfahren)**

Bestimmen Sie die maximale Schrittweite h, für die das „klassische“ 4-stufige Runge–Kutta-Verfahren das System

$$u'(t) = -10u(t) + 9v(t), \quad v'(t) = 9u(t) - 10v(t)$$

noch numerisch stabil integriert, d.h. es muss gelten $h\lambda_i \in \mathcal{I}_{RK},\ i = 1, 2$, mit den Eigenwerten $\lambda_i = \lambda_i(A)$ des angegebenen Systems und dem Stabilitätsintervall $\mathcal{I}_{RK} = [-2.78, 0]$ des klassischen Runge–Kutta-Verfahrens.

Hinweis: Über die Stabilitätsfunktion $R_0(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24}$ des klassischen RK-Verfahrens ist das Stabilitätsintervall durch $\mathcal{I} = \{z \in \mathbb{R}|\ |R_0(z)| \le 1\}$ erklärt. Für das obige Verfahren kann man $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{RK}$ an [Rei], Abb. 2.4, ablesen.

17. **(Lösung impliziter Gleichungen)**

Zur Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u''(t) = -20u'(t) - 19u(t), \quad t \ge 0\,, \quad u(0) = 1,\, u'(0) = -10\,,$$

soll das Adams–Moulton-Verfahren mit Schrittzahl $s = 2$

$$u_j = u_{j-1} + \frac{1}{12}\, h(5f_j + 8f_{j-1} - f_{j-2})$$

verwendet werden. Dazu formen Sie die Differentialgleichung zunächst in ein System erster Ordnung um. Wie klein muss dann die Schrittweite h bemessen sein, damit in jedem Zeitschritt die Konvergenz der Fixpunktiteration zur Berechnung von u_j garantiert ist?

18. **(Lösung von Differenzengleichungen für Mehrschrittverfahren)**

Betrachten Sie das Milne-Verfahren (mit $s = 3$):

$$u_{j+2} - u_j = \frac{h}{3}\left(f_{j+2} + 4f_{j+1} + f_j\right), \quad j = 0, \ldots, N_h - 2\,.$$

Geben Sie die Lösung des Verfahrens für die Testgleichung $u' = \lambda u$, $u(0) = 1$ an; verwenden Sie die Startwerte $u_0 = 1, u_1 = e^{\lambda h}$ mit Schrittweite $h > 0$ und $\lambda = -1$.

Hinweise: Verwenden Sie für die Lösung des Ansatz

$$u_j = \alpha\lambda_1^j + \beta\lambda_2^j\,, \quad j = 0, 1, \ldots\,,$$

mit $\lambda_{1,2} = \dfrac{-2h \pm \sqrt{9 + 3h^2}}{3 + h}$.

Zeigen Sie damit, dass die Verfahrensgleichung erfüllt ist. Hierzu können Sie den Satz von Vieta oder elementare Überlegungen nutzen, um die quadratische Gleichung zu bestimmen, für die λ_1, λ_2 Nullstellen sind. Bestimmen Sie dann α und β aus den Startwerten $u_0 = 1$, $u_1 = e^{-h}$.