Prof. Dr. H.–J. Reinhardt **Dept. Mathematik**
Univ. Siegen

Übungsblatt (7)
zur Vorlesung „Numerik II“
im Sommersemester 2012

Abgabetermin für theor. Übungen: Donnerstag, 21.06.12, 10 Uhr
Abgabetermin für prakt. Übung: Donnerstag, 28.06.12, 12 Uhr)

19. **(A-Stabilität)**

Zeigen Sie, dass die implizite Runge–Kutta Formel 2-ter Ordnung

$$y_k = y_{k-1} + \frac{1}{2}\,h\{k_1 + k_2\}, \quad k_1 = f(t_{k-1},\, y_{k-1}), \quad k_2 = f(t_k, y_{k-1} + \frac{1}{2}\,hk_1 + \frac{1}{2}\,hk_2)\,,$$

A-stabil ist.

Hinweis: Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion $R_0(z)$ für dieses Verfahren und zeigen Sie, dass $|R_0(z)| \leq 1$ für alle $z : Re(z) \leq 0$.

20. **(Konsistenzordnung von Mehrschrittverfahren)**

Bestimmen Sie mit Hilfe der Bedingung (a) aus [Rei], Satz 3.10,

$$\text{(a)} \qquad \sum_{k=0}^{s} a_k = 0 \text{ und } \sum_{k=0}^{s} (k^\ell a_k - \ell k^{\ell-1} b_k) = 0 \text{ für } \ell = 1, \ldots, p\,,$$

die von $\gamma \in \mathbb{R}$ abhängige Konsistenzordnung p des linearen Mehrschrittverfahrens

$$\frac{1}{h}\Big(u_h(t_3) + \gamma\big(u_h(t_2) - u_h(t_1)\big) - u_h(t_0)\Big) = \frac{3+\gamma}{2}(f_2 + f_1)\,,$$

für $t_j = t + jh,\ f_j = f\big(t_j, u_h(t_j)\big),\ j = 0, 1, 2, 3,\ t \in I'_h\,(s = 3)\,.$

- bitte wenden -

21. **(Praktische Aufgabe)**

Berechnen Sie Näherungslösungen für die Kippschwingung mit $\varepsilon = 0.1$ mit den folgenden Verfahren:

(a) (Gruppe C)
Extrapolationsverfahren von Adams ($s = 4$):

$$u_h(t_j) = u_h(t_{j-1}) + \frac{h}{24}\big(55 f_{j-1} - 59 f_{j-2} + 37 f_{j-3} - 9 f_{j-4}\big)\,,$$

$$\text{mit } f_j = f\big(t_j, u_h(t_j)\big)\,.$$

(b) (Gruppe B)
Prädiktor–Korrektor–Verfahren von Adams (s= 3)

$$\begin{aligned}\tilde{u}_h(t_j) &= u_h(t_{j-1}) + \frac{h}{12}\{23 f_{j-1} - 16 f_{j-2} + 5 f_{j-3}\}\,,\\ u_h(t_j) &= u_h(t_{j-1}) + \frac{h}{24}\{9\tilde{f}_j + 19 f_{j-1} - 5 f_{j-2} + f_{j-3}\}\,, \quad j = 3, 4, \ldots\,,\\ \text{mit } \tilde{f}_j &= f\big(t_j, \tilde{u}_h(t_j)\big)\,.\end{aligned}$$

(c) (Gruppe A)
Prädiktor-Korrektor-Verfahren von Nyström und Milne ($s = 3$):

$$\tilde{u}_h(t_j) = u_h(t_{j-2}) + \frac{h}{3}\big(7 f_{j-1} - 2 f_{j-2} + f_{j-3}\big)\,,$$

$$u_h(t_j) = u_h(t_{j-2}) + \frac{h}{3}\big(\tilde{f}_j + 4 f_{j-1} + f_{j-2}\big)\,,$$

$$\text{mit } \tilde{f}_j = f\big(t_j, \tilde{u}_h(t_j)\big)\,.$$

Vergleichen Sie die numerische Lösung mit der numerischen Lösung des klassischen RK-Verfahrens.

Rechnen Sie mit Schrittweiten $h = 5 \cdot 10^{-2}, 10^{-2}, 5 \cdot 10^{-3}$, und starten Sie bei der Anfangsbedingung aus Aufg. 10. Rechnen Sie bis $T = 130$.

Als Anlaufrechnung für $t_j = h, 2h$ bzw. $3h$ verwenden Sie die Näherungslösungen des klassischen RK-Verfahrens.