

Übungsblatt (9)
zur Vorlesung „Numerik II“
im Sommersemester 2012

Abgabetermin: Donnerstag, 05.07.12, 10 Uhr)

24. (Schießverfahren)

Die Randwertaufgabe

$$u''(x) = 100u(x), \quad 0 \leq x \leq 3, \quad u(0) = 1, \quad u(3) = e^{-30}, \quad (*)$$

soll mit dem einfachen Schießverfahren gelöst werden. Dazu bestimmen Sie die Lösung u von (*) und berechnen Sie die Lösung $y(x; s)$ der Anfangswertaufgabe

$$y''(x) = 100y(x), \quad x \geq 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = s,$$

und bestimmen Sie $s = s^*$ so, dass $y(3; s^*) = e^{-30}$ wird. Wie groß ist der relative Fehler in $y(3; s^*)$, wenn s^* mit einem relativen Fehler ε behaftet ist?

Hinweis: Benutzen Sie das Fundamentalsystem $\{e^{10x}, e^{-10x}\}$ von (*).

25. (Differenzenverfahren für Randwertaufgaben mit gemischten Randbedingungen)

Das Randwertproblem

$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in I = [a, b],$$

mit gemischten Randbedingungen

$$\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = \eta_0, \quad \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = \eta_1$$

werde auf einem Gitter $I_h = \{x = a + jh, j = 0, \dots, N_h\}$, $N_h = (b - a)/h$, durch die zentralen Differenzenquotienten 1. und 2. Ordnung in der Differentialgleichung und durch den vorwärtsgenommenen bzw. rückwärtsgenommenen Differenzenquotienten 1. Ordnung in den Randbedingungen bei $x = a$ bzw. $x = b$ approximiert. Stellen sie das zugehörige Gleichungssystem auf und geben Sie Bedingungen für dessen eindeutiger Lösbarkeit an.

Hinweise: Hier entsteht ein $(N_h + 1) \times (N_h + 1)$ – Gleichungssystem für die Unbekannten u_0, u_1, \dots, u_{N_h} , wobei $u_j = u_h(x_j)$. Setzen Sie voraus, dass $\alpha_1 < 0, \beta_1 > 0$ und machen Sie Fallunterscheidungen für α_0 und β_0 . Als Lösbarkeitskriterium verwenden Sie das schwache Zeilensummenkriterium.

26. (Gleichgradige Stetigkeit)

Sei $[a, b]$ ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall der reellen Zahlengeraden. Bekanntlich ist eine Folge $u_k \in C^1[a, b]$, $k \in \mathbb{N}$, gleichgradig stetig, falls die Ableitungen gleichmäßig beschränkt sind. Zeigen Sie, dass die Folge (u_k) auch gleichgradig stetig ist, falls nur gilt

$$|u_k|_{1,2} := \left(\int_a^b |u_k'(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq C, \quad k \in \mathbb{N}.$$