Prof. Dr. H.–J. Reinhardt

Dept. Mathematik
Univ. Siegen

Theoretische Übungen (1) zur Vorlesung „Theorie und Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen“ im Sommersemester 2013

(Abgabetermin: Mittwoch, 17.04.13, 10 Uhr)

1. **(Banachscher Fixpunktsatz)** Zur Berechnung der Nullstelle der Funktion

$$f(x) = x^2 - \ln x - 2,\ x \in (1, \infty)$$

mit Hilfe der Methode der sukzessiven Approximation bestimme man eine geeignete Iterationsfunktion und ein geeignetes Intervall $[a, b] \subset (0, \infty)$, so dass die Iterationsvorschrift in diesem gegen die Nullstelle konvergiert.

Hinweis: Schreiben Sie $f(x) = 0$ als Fixpunktgleichung um.

2. **(Differenzierbarkeit)**

Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Funktionen $f_k, k = 1, 2, 3$ definiert und wo sind sie differenzierbar? Man berechne dort auch jeweils die erste Ableitung.

a) $f_1(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1$
b) $f_2(x) = \ln(\cos(x))$
c) $f_3(x) = (\arctan(x))^2$.

3. **(Taylorsche Reihenentwicklung)**

Entwickeln Sie die Funktionen

$$\sin(x),\ e^x\ ,\ \ln(1 + x),\ (1 + x)^\alpha\ (\alpha \in \mathbb{R})$$

als Taylorreihen um die Stelle $x_0 = 0$. Geben Sie dafür einmal die allgemeine Form an und entwickeln Sie die Funktionen dann jeweils bis zur 3. Ordnung.

Entwickeln Sie auch die Funktion

$$f(x) = \lambda(x^2 - F^2)^2$$

um ein Minimum bis zur 4. Ordnung (λ und F sind reelle Zahlen).

4. **(System 1. Ordnung)**

Formen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y_1'' &= t^2 - y_1' - y_2^2\,, \\ y_2'' &= t + y_2' + y_1^3\,, \\ y_1(0) = 0, \quad y_2(0) &= 1, \quad y_1'(0) = 1, \quad y_2'(0) = 0 \end{aligned}$$

in ein Anfangswertproblem für ein System erster Ordnung um.