Prof. Dr. H.–J. Reinhardt

Dept. Mathematik
Univ. Siegen

Theoretische Übungen (2)
zur Vorlesung „Numerik II“
im Sommersemester 2013
(Abgabetermin: Mittwoch, 24.04.13, 10 Uhr)

5. **(Konvergenz des Polygonzug-Verfahrens)**

   Gegeben sei das Anfangswertproblem

   $$y' = t - t^3, \quad y(0) = 0\,.$$

   Zur Schrittweite h sollen mit dem Polygonzug-Verfahren Näherungswerte $u_\ell = u_h(t_\ell)$ für $y(t_\ell), t_\ell = \ell h$, berechnet werden.

   a) Geben Sie $y(t_\ell)$ und u_ℓ explizit an und

   b) zeigen Sie, dass an jeder Stelle t der Fehler für $h = t/n \to 0$ geben Null konvergiert.

6. **(Verbessertes Verfahren von Euler–Cauchy)**

   Wenden Sie für das lineare AWP

   $$u(t_0) = \alpha,\; u'(t) = A(t)u(t) + b(t),\; t \in [t_0, t_0 + T]\,,$$

   das verbesserte Verfahren von Euler–Cauchy an und schreiben es in der Form

   $$u_h(t_0) = \alpha_h,\; u_h(t+h) = C_h(t)u_h(t) + hd_h(t),\; t \in I_h'\,.$$

   Geben Sie $C_h(t)$ und $d_h(t)$ mit Hilfe von $A(t)$ und $b(t)$ an.

7. **(Lineare Einschrittverfahren)**

   Zeigen Sie (durch vollständige Induktion), dass sich die Lösung des linearen Einschrittverfahrens

   $$u_{m+1} = C_m u_m + h\,d_m, m = 0, \ldots, N-1\,,$$

   explizit darstellen läßt als

   $$u_{m+1} = \prod_{\nu=0}^{m} C_\nu u_0 + h \sum_{\mu=0}^{m} \prod_{\nu=\mu+1}^{m} C_\nu d_\mu,\; m = 0, \ldots, N\,.$$

   Hierbei ist nach Definition $\prod\limits_{\nu=n}^{m} C_\nu = C_m \prod\limits_{\nu=n}^{m-1} C_\nu$ für $m > n$, $\prod\limits_{\nu=n}^{n} C_\nu = C_n$, $\sum\limits_{\nu=n}^{m} C_\nu = 0$ und $\prod\limits_{\nu=n}^{m} C_\nu = I$, falls $n > m$.